



UTJECAJ GUSTOĆE MKE NA TOČNOST REZULTATA KOD TANKIH PLOČA

dr. sc. **Vlaho Akmadžić** dipl. ing. građ.
Građevinski fakultet Sveučilišta u Mostaru
Kristina Prusac B.Sc.
Građevinski fakultet Sveučilišta u Mostaru

Sažetak: Izvršena je analiza tankih ploča. Standardni numerički model tankih ploča je zasnovan na Germain-Kirchhoffovim pretpostavkama. Model materijala plošnog konačnog elementa ploče je izotropni Hookeov materijal. Njegove karakteristike zadaju se preko Youngovog modula E i Poissonovog koeficijenta ν . Ukratko je prikazan numerički model plošnih konstrukcija. Sličan model je implementiran u računalni program Tower [7]. Kao rezultat program daje odgovarajuće vrijednosti generaliziranih sila, naprezanja i pomaka. Na primjeru tanke kvadratne ploče prikazuju se mogućnosti razvijenog numeričkog modela za analizu plošnih konstrukcija. Ploča je diskretizirana s plošnim 2D KE, i to u prvom primjeru s minimalno prihvatljivom mrežom konačnih elemenata. U idućim koracima mreža je progušćavana. Uspoređeni su rezultati analize nastali primjenom komercijalnog programa s teoretskim rješenjem.

Ključne riječi: tanke ploče, numerički model, plošni element

THE INFLUENCE OF DENSITY OF FEM ON THE ACCURACY OF RESULTS IN THIN SLABS

Abstract: The article deals with analysis of the thin plates. Numerical thin plate model is based on the Germain-Kirchhoff theory. Material model of the thin plate finite element is isotropic elastic material. The material is defined by the Poisson's coefficient ν and Young modulus of elasticity E . The numerical model of the surface structures is presented in short. A similar model has been implemented in a computer program Tower [7]. As a result, the program gives the corresponding values of generalized forces, stresses and displacements. The model application on the surface elements is illustrated by the thin square plate structure. The plate is discretised with the flat finite element. In the first example the minimal acceptable finite element discretisation is taken into account. In the following examples the mesh density is greater. The results, made by commercial software and by the theory, are compared.

Key words: thin plates, numerical model, surface element



1. OPĆENITO

Numerički model, kojim su se analizirale konkretne plošne konstrukcije, bazira se na tehnici konačnih elemenata. Budući da se konstrukcija dijeli na dovoljno male dijelove, konačne elemente, konkretni problem se maksimalno pojednostavljuje, jer se sada svodi na rješavanje problema na jednom elementu, dok se na ostalim ponavlja. Stoga je ova metoda vrlo praktična za primjenu računala.

Cilj je da se pomoću simulacije konstrukcije putem numeričkog modela, a uz pomoć računala, sazna kako konstrukcija odgovara na vanjska djelovanja i kakav je karakter tog odgovora. Odnosno, drugačije rečeno, kakve su deformacije i unutarnje sile i je li ravnoteža, za slučaj malog dinamičkog utjecaja, stabilna.

Programski paket Tower, firme Radimpex, u koji je ugrađen ovakav numerički model, analizira statička stanja plošnih konstrukcija, odnosno u ovom primjeru tankih ploča.

Izlaže se samo dio materije koji je vodio k formiranju karakterističnog konačnog elementa tanke ploče, a detaljnije se može vidjeti u radu [2] ili u uputama za program [7].

2. NUMERIČKI MODEL PO TEORIJI TANKIH PLOČA

U ravninskom savojnom stanju analiziraju se konstrukcije koje spadaju u kategoriju ploča. Tu se razlikuju dvije dominantne grupe ploča, tanke i debele. Za ploču se kaže da se klasificira kao tanka ako joj je debljina mala u odnosu na raspon i ako joj je posmično deformiranje zanemarivo u odnosu na savojno. S druge pak strane, ploča se klasificira debelom ako joj je debljina usporediva s rasponom i ako je red posmične i savojne deformacije isti.

Na tankim pločama primjenjuje se pretpostavka o malim pomacima, ako su najveći progibi ploče manji od njene debljine. Kad se najveći progib približi debljini ploče, nužna je primjena teorije velikih pomaka.

Germain-Kirchhoffove pretpostavke teorije tankih ploča su po teoriji malih pomaka:

- normala na srednju plohu ploče prije savijanja ostaje normala na srednju plohu i nakon savijanja, što znači da se zanemaruju posmična naprezanja τ_{xz} i τ_{yz} ;
- zanemaruje se normalno naprezanje σ_{zz} i odgovarajuća deformacija ε_{zz} ;
- progib bilo koje točke (x, y, z) jednak je progibu pripadne točke srednje progibne plohe $(x, y, 0)$;
- progibi ploče su mali u odnosu na debljinu ploče, tako da su membranska djelovanja zanemariva u odnosu na savijanje;
- materijal je homogen, izotropan i zadovoljava Hookeov zakon.

Prve tri pretpostavke omogućuju da se problem promatra kao dvodimenzionalni ravninski.

Posljedice navedenih pretpostavki se odražavaju na izgled vektora relativnih deformacija ploče

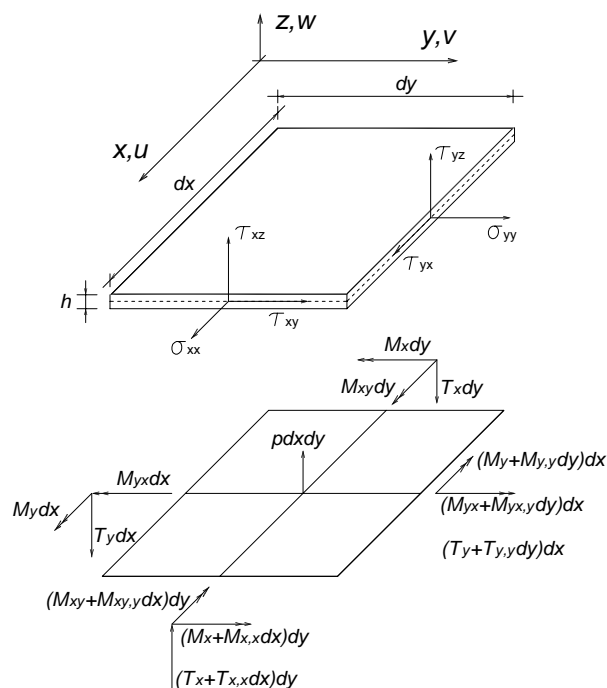
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = -z \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \cdot w \quad (1)$$



Odgovarajući vektor naprezanja je

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = -\frac{E \cdot z}{1-\nu^2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (2)$$

gdje oznaka E predstavlja Youngov modul elastičnosti, a ν Poissonov koeficijent. Ravnoteža će se promatrati na diferencijalnom elementu ploče prikazanom na slici 1.



Slika 1. Naprezanja i sile u presjecima diferencijalno malog elementa ploče

Uvjeti ravnoteže diferencijalnog elementa ploče svode se na tri parcijalne diferencijalne jednačbe prvog reda.

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + p &= 0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - T_x &= 0 \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - T_y &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$



Eliminiraju li se poprečne sile u izrazu (3), uvjeti ravnoteže se mogu prikazati diferencijalnom jednačkom drugog reda

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p = 0 \quad (4)$$

u kojoj figuriraju samo momenti savijanja. Vrijednosti momenata savijanja i momenta uvijanja, uz korištenje izraza (2), se dobivaju iz

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} \cdot z \, dz = -D_s \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yy} \cdot z \, dz = -D_s \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} \cdot z \, dz = -(1-\nu) \cdot D_s \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (5)$$

gdje je D_s konstanta krutosti ploče na savijanje dobivena na način

$$D_s = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1-\nu^2)} \quad (6)$$

Uzmu li se u obzir izrazi (4), (5) i (6) dobiva se nova parcijalna diferencijalna jednačba savijanja ploče četvrtog reda, koja opisuje oblik deformirane ploče, a izgleda

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D_s} \quad (7)$$

3. RAVNINSKO SAVOJNO STANJE – FORMULACIJA METODOM POMAKA

Ako su poznati progibi točaka w u svim točkama ploče, definirano je polje pomaka p koje se može predstaviti kao

$$p \cong \{w(\xi, \eta)\} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{u} \quad (8)$$

gdje je matrica čvornih baznih funkcija funkcijskog preslikavanja označena s \mathbf{H} , a vektor čvornih pomaka s \mathbf{u} .

Kod razvijenog elemenata ploče translacijska i rotacijska polja su nezavisna. Za slučaj tanke ploče vektor nepoznatih pomaka \mathbf{u}_i , u svakom čvoru elementa ploče izgleda



$$\mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} w_i \\ \varphi_i \\ \theta_i \end{bmatrix} \quad (9)$$

a odgovarajući vektor čvornih baznih funkcija \mathbf{H}_i

$$\mathbf{H}_i = [h_{i1} \quad h_{i2} \quad h_{i3}] \quad (10)$$

gdje h_{i1} predstavlja čvornu baznu funkciju jediničnog translacijskog pomaka, h_{i2} čvornu baznu funkciju zaokreta oko osi ξ , h_{i3} čvornu baznu funkciju zaokreta oko osi η .

4. RAVNINSKO SAVOJNO STANJE – IZVOD JEDNADŽBE RAVNOTEŽE NAČELOM VIRTUALNOG RADA

Neka je konačni element izložen djelovanju statičkih sila \mathbf{f} , tada se, pomoću principa virtualnog rada, može napisati

$$\int_{\Gamma} \mathbf{p}^T \mathbf{s} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{p}^T \mathbf{f} \, d\Omega = 0 \quad (11)$$

gdje je vektor unutrašnjih sila $\boldsymbol{\sigma}$, vektor čvornih sila \mathbf{s} , vektor virtualnih pomaka $\delta \mathbf{p}$, vektor pripadnih virtualnih deformacija $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$, Ω je područje, a Γ rub elementa.

Prikažu li se čvorne sile izrazom

$$\mathbf{s} = [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3, \mathbf{s}_4]^T \quad (12)$$

onda vektor čvornih sila vezan uz i -ti čvor izgleda

$$\mathbf{s}_i = [T_{iz}, M_{ix}, M_{iy}]^T \quad (13)$$

Vektor relativnih deformacija $\boldsymbol{\varepsilon}$ u proizvoljnoj točki konačnog elementa, vodeći računa o izrazu (8), se može prikazati kao

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{p} = \mathbf{L} \mathbf{H} \mathbf{u} = \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (14)$$

Matrica deformacija \mathbf{B} povezuje komponente deformacija i pomake čvorova četveročvornog konačnog elementa

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4] \quad (15)$$

a sastoji se od n podmatrica \mathbf{B}_i ($i=1, \dots, n$)



$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 h_{i1}}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 h_{i2}}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 h_{i3}}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 h_{i1}}{\partial y^2} & -\frac{\partial^2 h_{i2}}{\partial y^2} & -\frac{\partial^2 h_{i3}}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 h_{i1}}{\partial x \partial y} & -2\frac{\partial^2 h_{i2}}{\partial x \partial y} & -2\frac{\partial^2 h_{i3}}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Naprezanja $\boldsymbol{\sigma}$ i deformacije $\boldsymbol{\varepsilon}$ su vezane općim konstitutivnim zakonom, koji za elastičan materijal predstavljaju generalizaciju Hookeovog zakona,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (17)$$

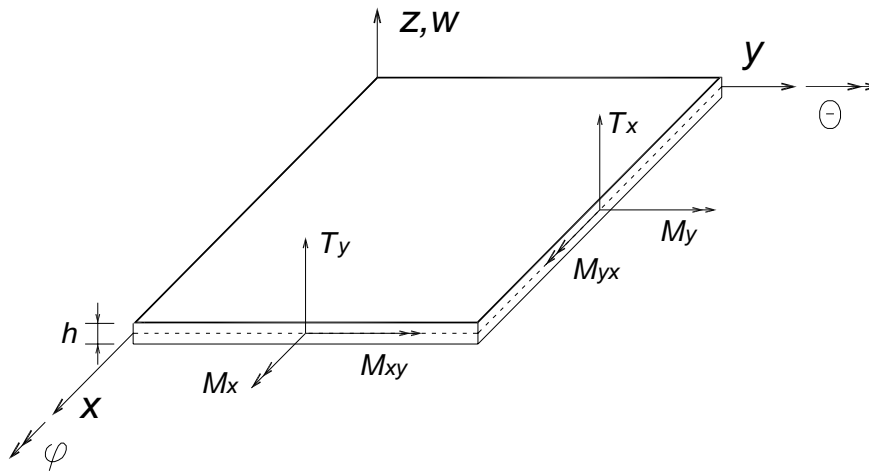
s vektorom unutrašnjih sila oblika

$$\boldsymbol{\sigma} = [M_x, M_y, M_{xy}]^T \quad (18)$$

Matrica elastičnosti \mathbf{D} za problem savijanja tankih ploča se može prikazati

$$\mathbf{D} = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \quad (19)$$

pri čemu E označava Youngov modul, h debljinu ploče, a ν Poissonov koeficijent. Predznaci unutrašnjih sila, pomaka i deformacija vidljivi su na crtežu 2.



Slika 2. Predznaci unutrašnjih sila, pomaka i deformacija na ploči

Ako se u jednadžbu virtualnog rada (11), uvrste odgovarajući izrazi za pomak, deformacije i matricu materijala, tad se dobiva

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{N}^T \mathbf{f} \, d\Omega - \mathbf{u}^T \mathbf{s} = 0 \quad (20)$$

Koristeći odgovarajuće matrične operacije izraz postaje

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{f} \, d\Omega - \mathbf{s} = 0 \quad (21)$$

odnosno

$$\mathbf{s}^e = \mathbf{k}^e \mathbf{u} - \mathbf{f}^e \quad (22)$$

gdje su \mathbf{k}^e i \mathbf{f}^e matrica krutosti i vektor opterećenja elementa dani izrazima

$$\mathbf{k}^e = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, d\Omega, \quad \mathbf{f}^e = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{f} \, d\Omega \quad (23)$$



Preslikavanje sila i matrica elementa iz lokalnog u globalni koordinatni sustav, ima oblik

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_G^e &= \mathbf{s}^e \\ \mathbf{k}_G^e &= \mathbf{T}^T \mathbf{k}^e \mathbf{T} \\ \mathbf{F}_G^e &= \mathbf{F}^e \end{aligned} \quad (24)$$

gdje je \mathbf{T} matrica preslikavanja.

5. PRIMJER

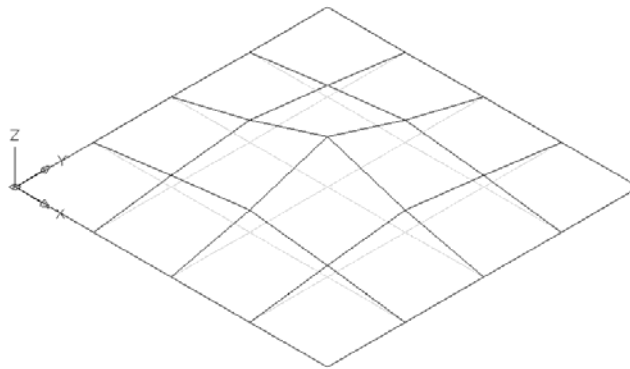
Na ovom primjeru verificirati će se razvijeni numerički model s rezultatima ispitivanja provedenim od strane autora [2] i analitičkim proračunom prema [3], a za mrežu konačnih elemenata 4x4. U idućim koracima će se mreža proglašavati.

Obrađena je AB kvadratna ploča dimenzija 10.0m x10.0m, debljine $t=0.1\text{m}$, opterećena koncentriranom silom $F=100\text{kN}$ u sredini raspona. Rezultati pomaka su prikazani u tablici 1 i crtežu 3, dok su rezultati raspodjele momenata i naprezanja prikazani na crtežima 4 - 6, zajedno s njihovim vrijednostima.

5.1 Primjer s mrežom konačnih elemenata 4x4

Slučaj	Slobodno oslonjena ploča			Upeta ploča		
	w	M(u=0.0)	M(u= 0.3)	w	M(u=0.0)	M (u= 0.3)
Prema [2]	12.2	23.06	30.17	6.15	19.32	25.11
Analitički	11.6	-	-	5.59	-	-
LJUSKA [1]	12.202(u=0.0) 11.257(u=0.3)	16.02	21.038	6.06(u=0.0) 5.62(u=0.3)	11.997	15.803
TOWER [7]	10.971(u=0.0) 10.395(u=0.3)	19.05	21.600	4.89(u=0.0) 4.81(u=0.3)	14.900	16.060

Tablica 1. Rezultati pomaka w središta ploče

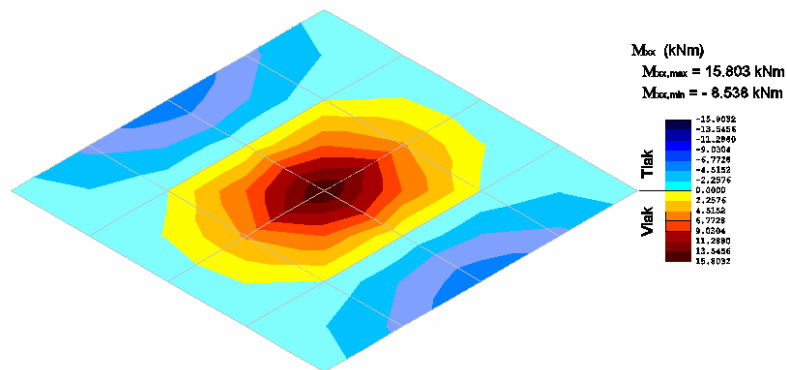


Materijalne
karakteristike ploče:

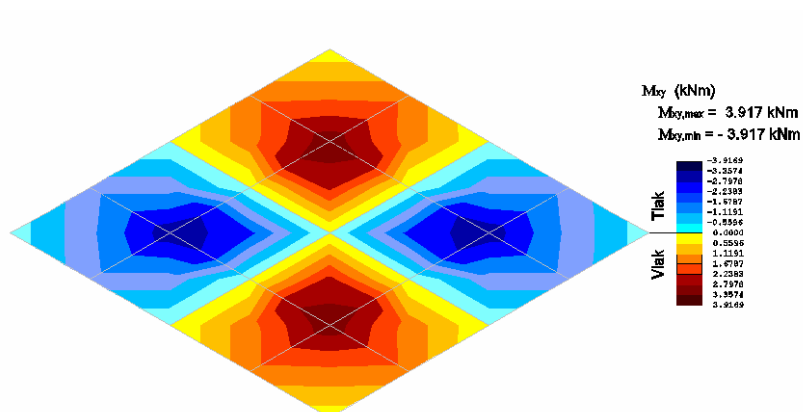
- Youngov modul
 $E=1.2\text{MPa}$,

- Poissonov
koeficijent
a) $\nu=0.0$,
b) $\nu=0.3$.

Slika 3. Grafički prikaz diskretizacije i polja pomaka w kvadratne ploče



Slika 4. Raspodjela momenata savijanja M_{xx} u upetoj ploči



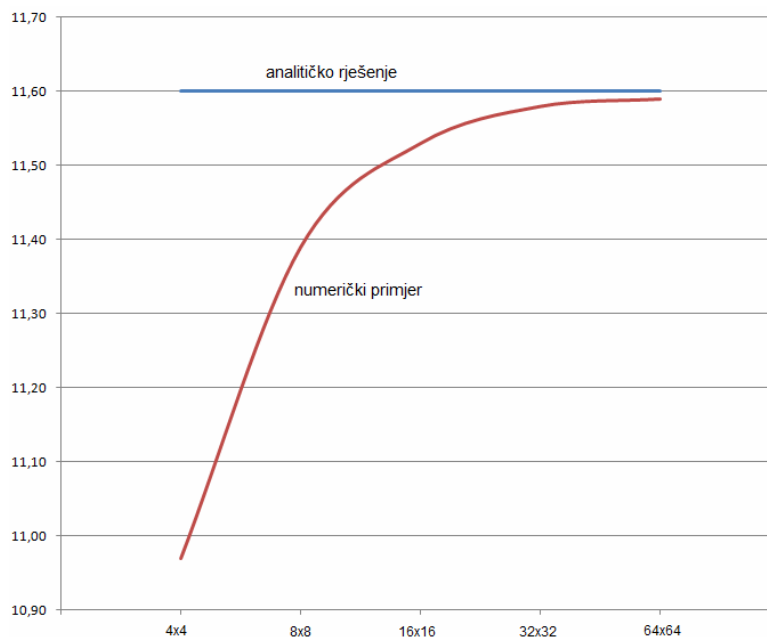
Slika 5. Raspodjela momenata savijanja M_{xy} u upetoj ploči



5.2. Primjer s progušćenjem mrežom konačnih elemenata i linijskim oslanjanjem

Slučaj	Slobodno oslonjena ploča					Upeta ploča				
	progib w					progib w				
Analitički	11.60					5.59				
TOWER [7]	MKE					MKE				
	4x4	8x8	16x16	32x32	64x64	4x4	8x8	16x16	32x32	64x64
($u=0.0$)	10.97	11.39	11.53	11.58	11.59	4.91	5.38	5.54	5.59	5.60
($u=0.3$)	10.39	10.50	10.54	10.55	10.55	4.81	5.03	5.08	5.10	5.11

Tablica 2. Rezultati pomaka w središta ploče za progušćenje mreže



Slika 6. Prikaz približavanja numeričkog i analitičkog rješenja za progušćenje MKE za slobodno oslonjenu ploču za Poissonov koeficijent 0,00

6. ZAKLJUČAK

Prikazana je primjena numeričkog modela na statičke zadatke plošnih konstrukcija. Cilj ovog primjera je da osim prikaza ponašanja rezultata pomaka različitih autora za relativno rijetku mrežu pokažu i grafičke mogućnosti programa [7]. Osim polja pomaka prikazane su raspodjele odgovarajućih momenata savijanja i glavnog naprežanja.

Pogledaju li se razlike u pomacima, prikazane u tablici 1 u prvom primjeru, može se uočiti kako maksimalna odstupanja od analitičkih rješenja padaju ispod granice od 5%.



Odstupanja u vrijednostima momenata od onih kod autora [2] se mogu objasniti činjenicom da se kod autora [1] ne koriste funkcije pune upetosti.

S druge strane utjecaj gustoće mreže konačnih daje zanimljivije rezultate (Tablica 2), te pokazuje kako se s gušćom mrežom dobivaju bolji rezultati. U prvom slučaju kada je Poissonov koeficijent jednak nuli, već za mrežu konačnih elemenata 32x32 dobivamo rezultat jednak analitičkom postupku. Kod složenijih primjera postupak konvergencije k analitičkom rješenju, ako isti postoji, je znatno sporiji. Limitirajući faktori su mogućnosti računala i ograničenje maksimalnog broja čvorova u programskom paketu Tower.

LITERATURA

1. V. Akmadžić: Model velikih pomaka u analizi plošnih i linijskih konstrukcija, Doktorska disertacija, Građevinski fakultet Sveučilišta u Mostaru, Mostar, 2008.
2. Ž. Nikolić: Doprinos poboljšanju rješenja nad konačnim elementima linijskih konstrukcija i tankih ploča, Doktorska disertacija, Građevinski fakultet Sveučilišta u Splitu, Split, 1999.
3. S. P. Timoshenko, J. M. Gere, Theory of elastic stability, McGraw-Hill, London, 1986.
4. K. J. Bathe: Finite element procedures, Prentice Hall, Englewood, 1995.
5. A. Mihanović: Stabilnost konstrukcija, DHGK, Zagreb 1993.
6. A. Mihanović, P. Marović, J. Dvornik: Nelinearni proračuni armiranobetonskih konstrukcija, DHGK, Zagreb 1993.
7. TOWER 3D MODEL BUILDER, inačica 6.0, računalni program firme Radimpex, Beograd, 2008.