

Odgovor pločaste konstrukcije na promjenu oblika konačnog elementa i kvalitete materijala, CYPE/TOWER

Matej Lozančić

Sveučilište u Mostaru, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, mag. građ.
matej.lozancic@fgag.sum.ba

Marko Mandić

markom@e-distri.com

Vlaho Akmadžić

Sveučilište u Mostaru, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, prof. dr. sc.
vlaho.akmadzic@fgag.sum.ba

Sažetak: Prilikom analize konstrukcija postoji više različitih metoda koje se upotrebljavaju. Metoda koja se najčešće koristi u analizi je metoda konačnih elementa. U razradi problematike rada također je korištena metoda konačnih elemenata, a vezana je za pomak u pločastim konstrukcijama. Numerički modeli će se aproksimirati konačnim trokutnim elementima u programu CYPE te konačnim kvadratnim elementima u programu TOWER 3D Model Builder. U konačnici će se usporediti rezultati, utjecaj izgleda, gustoće mreže konačnih elementa kao i kvalitete betona na rezultat analize.

Ključne riječi: analiza, trokutna mreža, kvadratna mreža, progib, beton, CYPE, TOWER

The response of the plate structure to the change in the shape of FE and the quality of the material, CYPE/TOWER

Abstract: When analyzing structures, there are several different methods that are used. The method most often used in analysis is the finite element method. The finite element method was also used in the elaboration of the problem herein, and it is related to displacement in plate structures. Numerical models will be approximated by finite triangular elements in the CYPE program and by finite square elements in the TOWER 3D Model Builder program. In the end, a comparison will be made of the results and of the influence of the type and density of the finite element mesh as well as the quality of the concrete on the result of the analysis.

Key words: analysis, triangular mesh, square mesh, deflection, concrete, CYPE, TOWER

Lozančić, M., Mandić, M., Akmadžić, V.

Odgovor pločaste konstrukcije na promjenu oblika konačnog elementa i kvalitete materijala, CYPE/TOWER

1. UVOD

Diskretizacija područja predstavlja osnovni korak pri uporabi metode konačnih elemenata. Diskretizirana konstrukcija je ona koja je podijeljena na mrežu konačnih elemenata. S obzirom na ponašanje konstrukcije u stvarnosti postoje dvije vrste pogreške, pogreške modela i pogreške diskretizacije. Pogreške modela mogu se aproksimirati kvalitetnijim modelom konstrukcije koji će bolje i realnije opisivati stvarno ponašanje konstrukcije. Pogreške diskretizacije mogu se smanjiti kvalitetnijom mrežom konačnih elemenata ili povećanjem stupnjeva slobode (polinomi višeg stupnja) konačnih elemenata za opis polja pomaka [1], [2].

Za svaki element pretpostavlja se rješenje zadane diferencijalne jednadžbe u obliku interpolacijskih funkcija koje povezuju ovisne varijable s njihovim vrijednostima u čvorovima. Izvodi se sustav algebarskih jednadžbi čije su nepoznanice veličine u čvorovima, nakon čega se formira globalni sustav jednadžbi za cijeli diskretizirani model, u kojemu su nepoznanice vrijednosti u čvorovima svih elemenata diskretiziranih područja. Postoje jednodimenzionalni, dvodimenzionalni i trodimenzionalni konačni elementi. Najjednostavniji konačni element je jednodimenzionalni element, dakle štap s dva čvora i s linearnom interpolacijom [3].

Svi ostali elementi su kompleksniji.

Metoda konačnih elemenata sastoji se od pet koraka:

- predprocesiranje – problem se dijeli na konačne elemente (diskretizacija proračunskih modela)
- formuliranje elementa – razvoj jednadžbe za elemente (formuliranje lokalne matrice krutosti elemenata)
- sastavljanje (assembly) – dobivanje jednadžbi za cijeli sustav iz jednadžbi za pojedine elemente (tvorba globalnog sustava jednadžbi)
- rješavanje jednadžbi
- postprocesiranje – određivanje rezultata, dobivanje vizualizacije [4]

2. NUMERIČKI MODEL PREMA KIRCHHOFFOVOJ TEORIJI

Promatra se ravninski nosač opterećen okomito na svoju središnju ravninu. Takav nosač naziva se ploča. Pretpostavlja se kako je debljina ploče konstantna i jednaka d . Debljina ploče je manjeg reda veličine u odnosu na preostale dvije dimenzije ploče, duljinu i širinu. Temeljne pretpostavke su da u središnjoj ravnini nema relativnih deformacija, da se točke okomice na središnju ravninu i nakon savijanja ploče nalaze na jednom pravcu okomitom na deformiranu središnju ravninu, odnosno da vrijedi Bernoullijeva hipoteza ravnih poprečnih presjeka i da se mogu zanemariti naprezanja okomita na ploču. Tada za sve točke središnje ravnine može pretpostaviti kako se njihov progib ostvaruje samo okomito na središnju ravninu ploče.

Koordinatni sustav postavlja se tako da se središnja ravnina podudara s ravninom xy . Točke središnje ravnine imaju koordinate $(x, y, 0)$, a nakon deformacije imaju koordinate (x, y, w) . Proizvoljna točka na udaljenosti z od središnje ravnine, (x, y, z) , a nakon deformacije, ima koordinate $(x + uz, y + vz, z + wz)$, što znači da dobiva pomake u smjeru sve tri koordinatne osi. Na temelju pretpostavke o debljini ploče kao dimenziji manjeg reda veličine od ostale dvije dimenzije slijedi [1], [4], [5]:

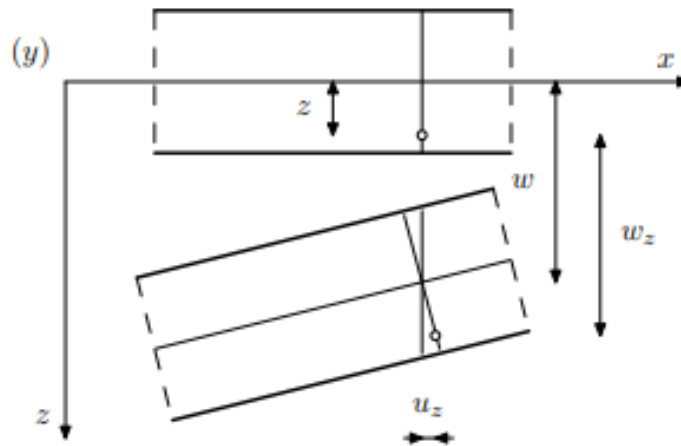
$$w(x, y, z) = w(x, y) \quad (1)$$

$$v(x, y, z) = -z \frac{\delta w}{\delta y} \quad (2)$$

Lozančić, M., Mandić, M., Akmadžić, V.

Odgovor pločaste konstrukcije na promjenu oblika konačnog elementa i kvalitete materijala, CYPE/TOWER

$$u(x, y, z) = -z \frac{\delta w}{\delta x} \quad (3)$$



Slika 1. Prikaz dijela ploče prije i poslije deformacije [4]

3. PROMATRANI TESTOVI

U sljedećim primjerima analizirat će se slučajevi različite gustoće mreže konačnih elemenata u programskom paketu CYPE, kao i utjecaj različite kvalitete betona na vertikalni pomak. Važno je istaknuti kako programski paket CYPE koristi trokutnu mrežu konačnih elemenata. Time se razlikuje od programskog paketa TOWER koji koristi pravokutnu mrežu konačnih elemenata. Dobiveni podaci dvaju programskih paketa usporediti će se u nastavku rada.

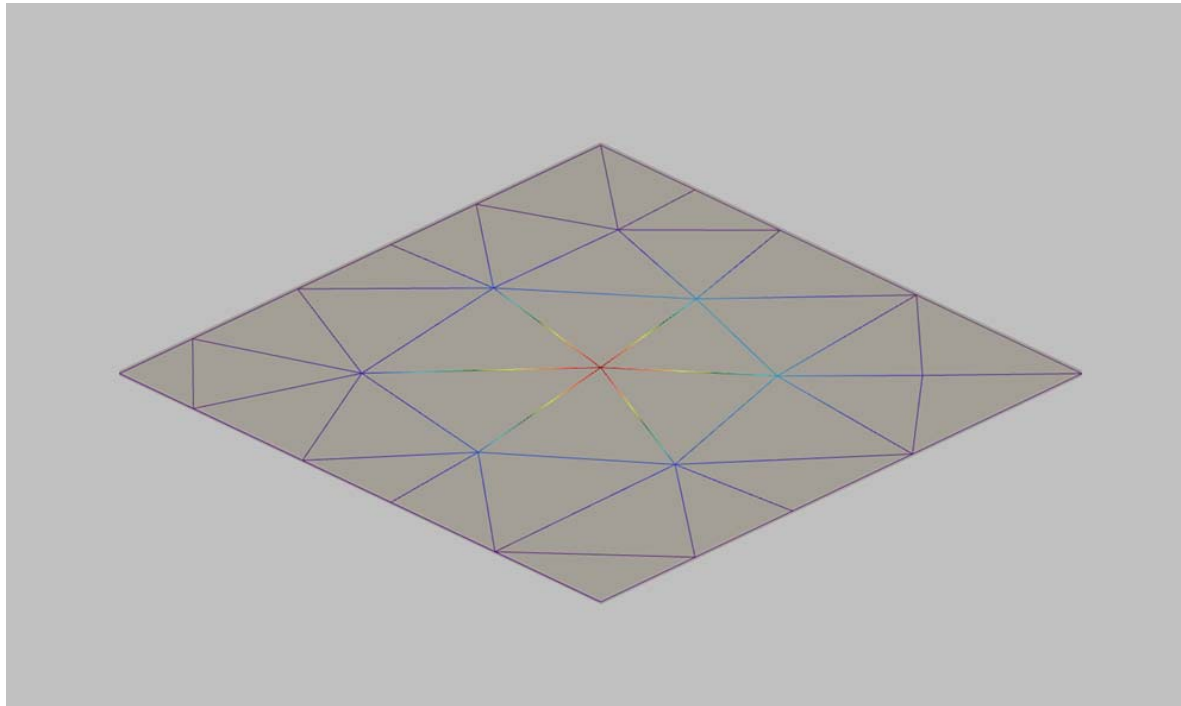
3.1 Prvi primjer – slobodno oslonjena ploča

Dimenzije kvadratne ploče preuzete iz rada [5] su 10,0 x 10,0 x 0,1 m. Materijal ploče ima karakteristike Young-ovog modula elastičnosti 27 GPa te Poisson-ovog koeficijent 0,2. Gustoća mreže kvadratnih konačnih elemenata varira od 4x4 do 32x32. S druge strane gustoća trokutne mreže konačnih elemenata je zadana preko maksimalne duljine stranice trokuta.

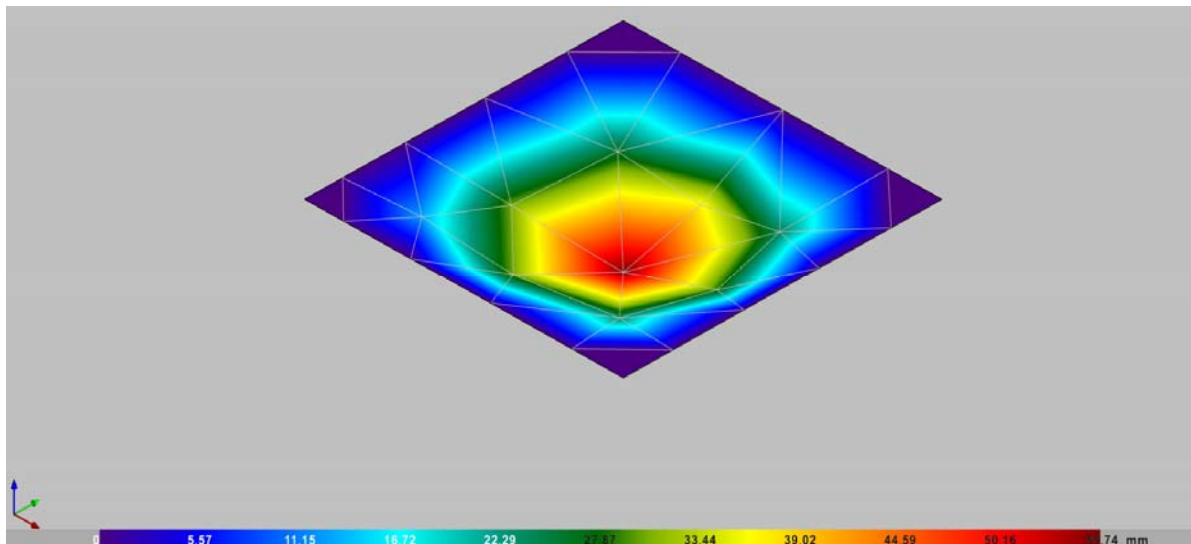
Sila koja djeluje u smjeru gravitacije zadana je u središnjoj točki ploče, a ima intenzitet u iznosu od 100,0 kN. Na slici 2 prikazana je ploča s minimalnom diskretizacijom u programskom paketu CYPE. Na slici 3 prikazan je vertikalni pomak za najjednostavniju mrežu konačnih elemenata te se analizom tablice 1. uočava kako je za ovu mrežu u programskom paketu CYPE on najveći. Slika 4 prikazuje najgušću raspodjelu konačnih elemenata u programskom paketu CYPE i ujedno najmanju (najtočniju) vrijednost vertikalnog pomaka.

Lozančić, M., Mandić, M., Akmadžić, V.

Odgovor pločaste konstrukcije na promjenu oblika konačnog elementa i kvalitete materijala, CYPE/TOWER



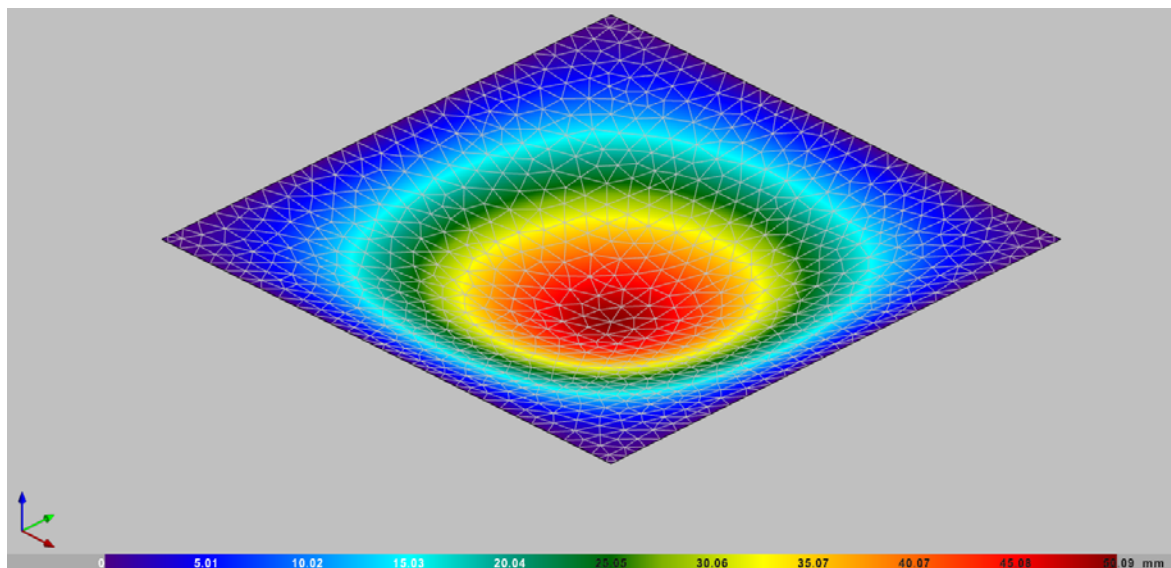
Slika 2. Ploča s minimalnom diskretizacijom mreže - CYPE



Slika 3. Vertikalni pomak slobodno oslonjene ploče – CYPE
(maksimalna dužina stranice trokuta 4 m)

Lozančić, M., Mandić, M., Akmadžić, V.

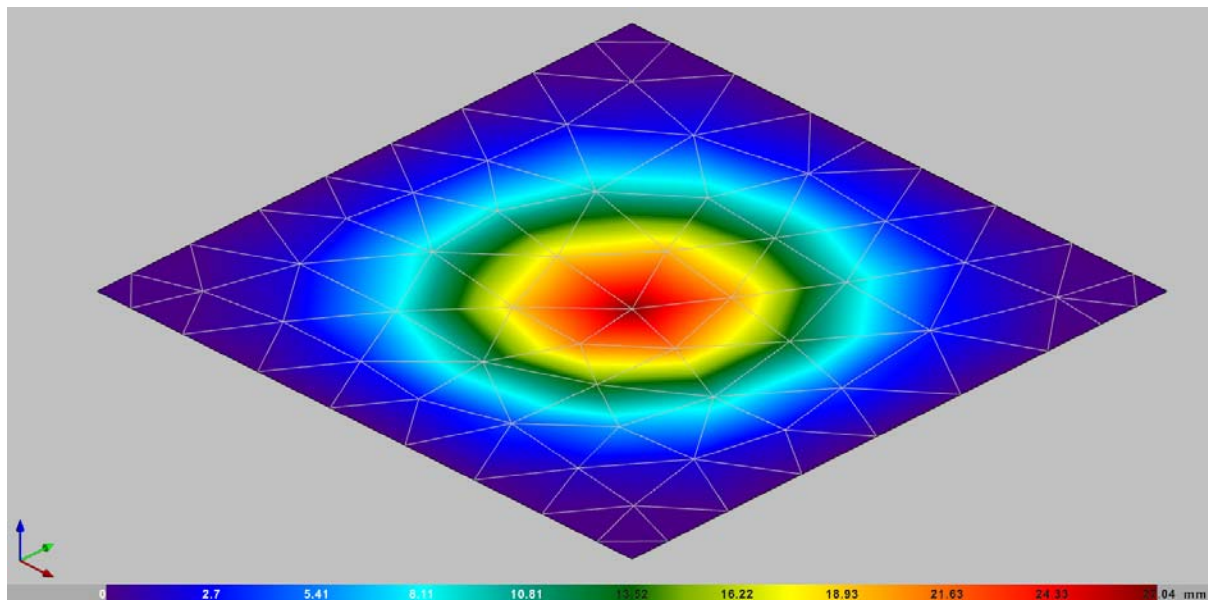
Odgovor pločaste konstrukcije na promjenu oblika konačnog elementa i kvalitete materijala, CYPE/TOWER



Slika 4. Vertikalni pomak slobodno oslonjene ploče – CYPE
(maksimalna dužina stranice trokuta 0.5 m)

3.2 Drugi primjer – upeta ploča

Prilikom analize upete ploče uzimaju se iste geometrijske i materijalne karakteristike te gustoća mreže konačnih elemenata. Dobiveni rezultati su prikazani u tablici 1. Na slici 5 naveden je primjer raspodjele trokutnih konačnih elemenata i veličine progiba za trokutnu mrežu dužine stranice trokuta 2m.



Slika 5. Vertikalni pomak upete ploče – CYPE
(maksimalna dužina stranice trokuta 2 m)

Lozančić, M., Mandić, M., Akmadžić, V.

Odgovor pločaste konstrukcije na promjenu oblika konačnog elementa i kvalitete materijala, CYPE/TOWER

U nastavku se prikazuju rezultati vertikalnog pomaka središnje točke pri različitoj gustoći mreže konačnih elemenata. Kod trokutne mreže (CYPE) riječ je o maksimalno zadanoj duljini stranice trokutnog elementa pri generiranju mreže.

Tablica 1. Vertikalni pomak središnje točke ploče u CYPE programu

		slobodno oslonjena ploča				upeta ploča			
		w (mm)				w (mm)			
Analitički		49.49				23.89			
CYPE 2023		FEM				FEM			
		4.00m	2.00m	0.5m	0.25m	4.00 m	2.00m	0.5m	0.25m
	(v=0.2)	55.74	52.63	50.09	49.96	28.59	27.04	24.04	24.17

Tablica 2. Vertikalni pomak središnje točke, usporedba CYPE i TOWER [5]

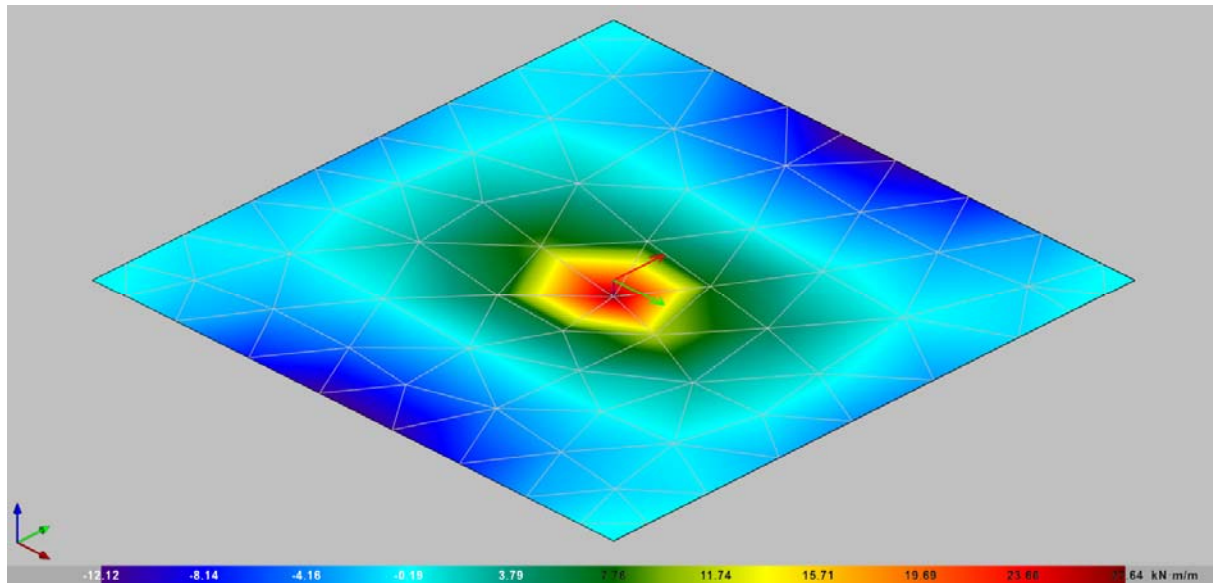
	slobodno oslonjena ploča	upeta ploča
	w (mm)	w (mm)
Analitički	23.89	23.89
TOWER 3D ModelBuilder version 7	49.09 (v=0.2)	23.58 (v=0.2)
CYPE v.2023.f	59.09 (v=0.2)	24.04 (v=0.2)

Prikazane vrijednosti navedene u tablici 2, a vezane za rezultate dobivene u programskom paketu TOWER 3D Model Builder 7 i programskom paketu CYPE uspoređene su za približno isti broj konačnih elemenata na koji je diskretizirana ploha, a to je 1652 kvadratna konačna elementa u TOWER-u i 1651 trokutni konačni element u CYPE-u.

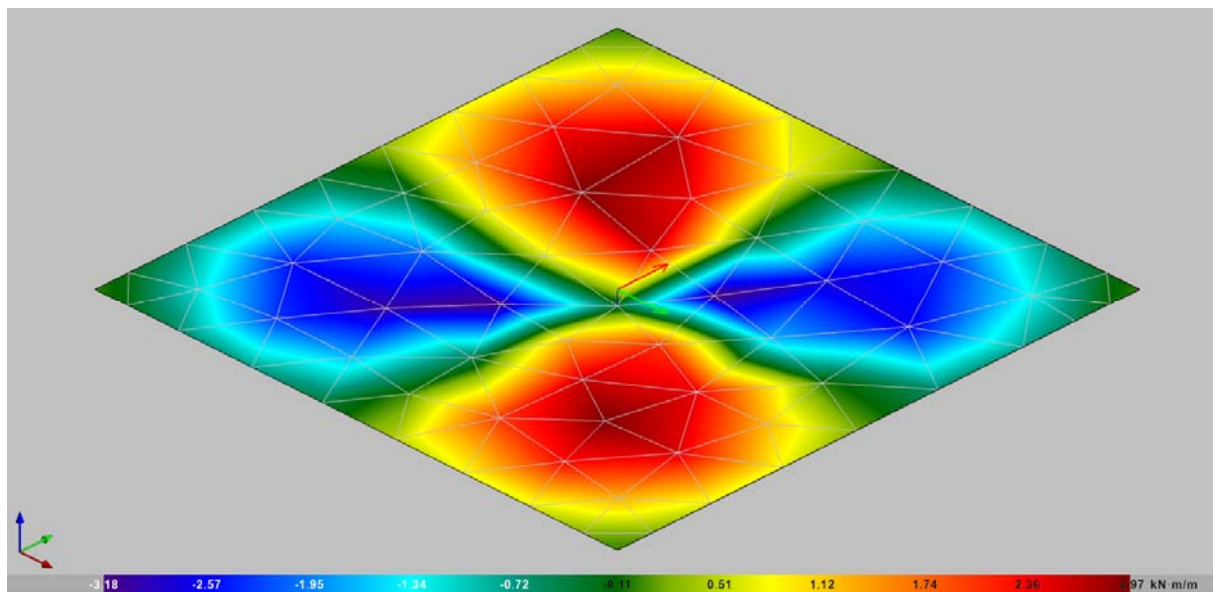
Grafički prikaz pomaka i momenata iz programskog paketa TOWER ne prikazuje se u ovom radu zbog ograničenja prostora, a jasno je izložen i prezentiran u literaturi [8] kroz kvadratne mreže konačnih elemenata 4x4, 8x8, 16x16 te 32x32.

Lozančić, M., Mandić, M., Akmadžić, V.

Odgovor pločaste konstrukcije na promjenu oblika konačnog elementa i kvalitete materijala, CYPE/TOWER



Slika 6. Moment savijanja upete ploče, M_x – CYPE



Slika 7. Moment savijanja upete ploče, M_{xy} - CYPE

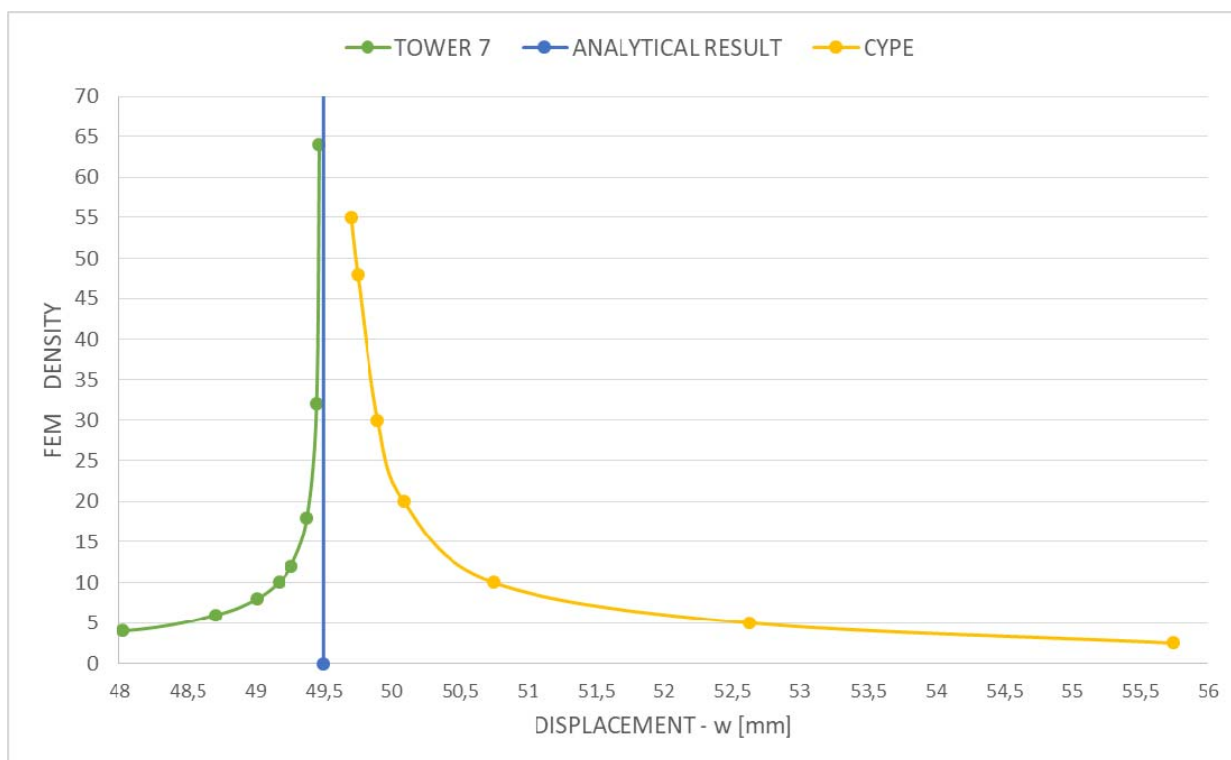
Utjecaj kvaliteta betona na pomak središnje točke ploče prikazan je u tablici 3. u programu CYPE u kojem je zadana maksimalna dužina stranice 2 m.

Lozančić, M., Mandić, M., Akmadžić, V.

Odgovor pločaste konstrukcije na promjenu oblika konačnog elementa i kvalitete materijala, CYPE/TOWER

Tablica 3. Vertikalni pomak sredine točke s promjenom kvaliteta betona

CYPE v.2023.f	slobodno oslonjena ploča	upeta ploča
	w (mm)	w (mm)
Beton E=2.70E+007kPa	52.63 (v=0.2)	27.04 (v=0.2)
Beton E=2.85E+007kPa	49.86 (v=0.2)	25.61 (v=0.2)
Beton E=3.00E+007kPa	47.37 (v=0.2)	24.33 (v=0.2)
Beton C25/30 E=3.15E+007kPa	45.11 (v=0.2)	23.17 (v=0.2)
Beton E=3.30E+007kPa	43.06 (v=0.2)	22.12 (v=0.2)



Slika 8. Točnost rezultata progiba s obzirom na gustoću mreže konačnih elemenata na slobodno oslonjenoj ploči

4. ZAKLJUČAK

Kroz rad su se analizirali numerički modeli koristeći dva programska paketa koja se oslanjaju na različite oblike mreže konačnih elemenata. Rezultati trokutne mreže konačnih elemenata

Lozančić, M., Mandić, M., Akmadžić, V.

Odgovor pločaste konstrukcije na promjenu oblika konačnog elementa i kvalitete materijala, CYPE/TOWER

iz programskog paketa CYPE usporedili su se s kvadratnom mrežom konačnih elemenata iz programskog paketa TOWER. Cilj je bio kroz grafičke i numeričke pokazatelje približiti rad i mogućnost obrade podataka kroz programski paket CYPE v.2023.f.

Analizirajući dobivene rezultate vidljivo je kako su odstupanja od analitičkog rješenja mala te da su za najgušću raspodjelu u programskom paketu CYPE gotovo istovjetna analitičkim rezultatima. Važno je napomenuti kako promjene kvalitete betona utječu samo u segmentu pomaka dok to nije slučaj s momentom savijanja. Najbolja moguća aproksimacija stvarnog stanja konstrukcije krajnji je cilj, a postiže se potrebnom gustoćom mreže konačnih elemenata.

Uvidom u vertikalne pomake i mrežu konačnih elemenata vidljivo je kako u programskom paketu CYPE mreža stranice trokuta 4 m daje veće progibe (55.74 mm) nego mreža stranice trokuta 0.25 m (49.96 mm), a što s obzirom na analitički proračun govori kako mreža s gustim KE daje točniji rezultat. Mreža 4x4 (stranice kvadrata 2.5 m) u TOWER-u daje manje pomake (48.03 mm) od mreže 32x32 (stranice kvadrata 0.3125 m) koja daje veće pomake (49.45 mm), ali opet s istom analogijom kako gušća mreža daje točniji rezultat (Slika 8.).

LITERATURA

1. Meštrović, M.: Metoda konačnih elemenata, Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet, Zagreb, 2020.
2. Mihanović, A., Trogrlić, B., Akmadžić, V.: Građevna statika II., Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije u Splitu, Split, Hrvatska, 2014., ISBN 978-953-6116-57-7
3. Sorić, J.: Uvod u numeričke metode u strojarstvu, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2009.
4. Fish, J., Belytschko, T.: A First Course in Finite Elements, Wiley, USA, 2007.
5. Ramljak, D., Akmadžić, V.: Influence of the mesh density and concrete quality on the results accuracy in thin plates, XVIII Anniversary International Scientific Conference by Construction and Architecture VSU'2018, Volume 1, pp. 341-350, Sofia, 2018.
6. Akmadžić, V.: Model velikih pomaka u analizi plošnih i linijskih konstrukcija, Doktorska disertacija, Građevinski fakultet Sveučilišta u Mostaru, Mostar, 2008.
7. Lozančić M., Akmadžić, V.: Konstrukcija objekta naplatne postaje na autocesti, e-Zbornik: Elektronički časopis Građevinskog fakulteta Sveučilišta u Mostaru, Vol. 10, No. 20, 92 p., (<https://doi.org/10.47960/2232-9080.2020.20.10.92>), Mostar, 2020.
8. Raspudić, V., Akmadžić, V., Lozančić, M.: Comparison of the convergence of results on the example of a thin plate, XXII International scientific conference VSU'2022, Volume II, pp. 67-75, Sofia, 2022.
9. Timoshenko, S. P., Gere, J. M. Theory of elastic stability, McGraw-Hill, 541 p., London, 1986.
10. Raspudić, V., Akmadžić, V., Lozančić, M.: Selected examples of the patch tests, XXII International scientific conference VSU'2022, Volume II, pp. 77-83, Sofia, 2022.
11. Raspudić V.: Nauka o čvrstoći, pregled teorije i tablice, Sveučilište u Mostaru, 220 p., Mostar, 2016., ISBN 978-9958-16-062-2