Pregledni rad/Review paper
Primljen/Received: 24. 4. 2019.
Prihvaćen/Accepted: 17. 6. 2019.

KONCEPT NELINEARNIH NORMALNIH MODOVA I NJIHOVA PRIMJENA U DINAMICI KONSTRUKCIJA

Mladen Kožul, izv. prof. dr. sc
Građevinski fakultet Sveučilišta u Mostaru, *mladen.kozul@gf.sum.ba*
Ante Džolan, mag. građ.
Građevinski fakultet *Sveučilišta* u Mostaru, *ante.dzolan@gf.sum.ba*
Valentina Ivanković Mihalj, mr. sc.
Građevinski fakultet *Sveučilišta* u Mostaru

Sažetak: Zbog široke i uspješne primjene linearne modalne analize (LMA), ne samo u dinamici konstrukcija, već praktično u svim područjima prirodnih i tehničkih znanosti, nastoji se njezin jednostavan koncept protegnuti na nelinearne dinamičke sustave. To je dovelo do formulacije nelinearne normalne analize (NMA), koja ima potencijal da postane snažan alat u analizi realnih dinamičkih sustava. U ovom radu je prikazana usporedba jednostavnih linearnih i nelinearnih sustava, te koncept nelinearnih normalnih modova (NNM). Za realnu procjenu dinamičkih parametara nužna je eksperimentalna modalna analiza, koja zatim u kombinaciji s nelinearnom analizom može dati realne rezultate.

Ključne riječi: linearna modalna analiza, nelinearna modalna analiza, nelinearni normalni modovi, eksperimentalna modalna analiza

THE CONCEPT OF NONLINEAR NORMAL MODES AND THEIR APPLICATION IN STRUCTURAL DYNAMICS

Abstract: Due to wide-ranging and successful aplication of linear modal analysis (LMA), not only in the structural dynamics, but practically in all areas of natural and engineering sciences, its simple concept strives to extends to nonlinear dynamical systems. This has led to the formulation of nonlinear modal analysis (NMA), which has a potential to become powerful tool in the analysis of real dynamic systems. This paper presents a comparison of simple linear and nonlinear systems, and the concept of nonlinear normal modes (NNM). For realistic estimation of dynamical parameters experimental modal analysis is neccessary, which can then, in combination with nonlinear analysis, give real results.

Keywords: linear modal analysis, nonlinear modal analysis, nonlinear normal modes, experimental modal analysis

1. Uvod

Linearna modalna analiza (LMA) je dobro poznata i učinkovita metoda za dobivanje odgovora linearnih dinamičkih sustava s više stupnjeva slobode. Ona je utemeljena na linearnim normalnim modovima (LNM). Svaki LNM je unutarnje svojstvo konstrukcije koje predstavlja sinhronu vibraciju konstrukcije pri rezonanciji. Linearni normalni mod karakteriziran je s tri parametra, modalni oblik (deformacija konstrukcije), prirodna frekvencija i prigušenje. Vrlo važno matematičko svojstvo LNM je njihova međusobna ortogonalnost. Metoda konačnih elemenata (MKE), LMA i druge linearne metode postale su standardni postupci za rješavanje problema dinamike konstrukcija. Kada točnost rješenja nije jako bitna, još uvijek je moguće tretirati sustave kao linearne, premda to oni uglavnom nisu. Međutim, kada je točnost predviđenog odgovora od vitalne važnosti, ili kada su nelinearni učinci veliki, linearna analiza postaje ne pouzdana. Razvojem računala očekivanja, u pogledu visoke točnosti odgovora, postaju sve veća.

Većina inženjerskih konstrukcija ispoljava nelinearno ponašanje, koje je često lokalnog karaktera (oslonci, veze, promjena geometrije i slično). Rješenje jednostavnijih nelinearnih problema može se relativno lako dobiti nekom od numeričkih metoda. Međutim, kada se radi o sustavima s mnogo stupnjeva slobode takvi izračuni mogu trajati jako dugo, te su nepraktični za realne situacije. Najčešće se realni problemi rješavaju linearnim metodama, dok su njihova nelinearna svojstva najčešće obuhvaćena nekom jednostavnom aproksimacijom. Ova tvrdnja djelomično proizlazi iz nedostatka jedinstvene teorije, koja može obuhvatiti općenite slučajeve nelinearnosti [1]. Međutim, kako bi se dobilo stvarno ponašanje sustava nužno je koristiti nelinearne metode. Koncept nelinearnog normalnog moda (NNM) pruža solidnu teorijsku podlogu za interpretaciju dinamike nelinearnih sustava. Početkom 1960-tih, u radovima [2,3] dan je koncept nelinearnih normalnih modova, koji proizlazi iz proširenja koncepta linearnih normalnih modova, što pruža jasnu konceptualnu vezu između njih. Iako postoji mnogo izvora nelinearnosti sustava literatura o NNM uglavnom se odnosi na lokaliziranu nelinearnu krutost i distribuirane (geometrijski) nelinearnosti. Prva numerička metoda, koja se odnosi na NNM prikazana je u radu [4]. Kasnije se javljaju mnogo napredniji pristupi [5]. U 1990-tima koncept NNM proširuje se na nekonzervativne sustave [6,7]. Koristeći analitičke metode NNM dobiveni su za sustave s linearnim i nelinearnim prigušenjem [8]. U zadnje vrijeme različite interpretacije definicije NNM dovele su do formulacije nekoliko numeričkih metoda za njihovo određivanje [9].

Kompleksnost nelinearne modalne analize (NMA) proizlazi iz sljedećih činjenica:

- lokalizirana nelinearnost može imati značajan utjecaj na čitavu konstrukciju, dok neki njezini dijelovi ostaju u linearnom području,
- nelinearni efekti obično su sadržani u samo nekoliko modova, dok se ostatak ponaša linearno,
- postoji nedostatak standardiziranih parametara koji na objektivan način mogu definirati stupanj nelinearnosti,
- ne postoji jednostavan i pristupačan način za prikaz nelinearnog odgovora u obliku neke, dobro definirane, algebarske funkcije.

Zbog ne postojanja unificirane nelinearne teorije uglavnom se nelinearni parametri uključuju u linearni okvir (LMA). Ovakav pristup osigurava kompatibilnost s LMA, ali to nužno ne predstavlja najbolji put. Postoje ozbiljna pitanja [10] o valjanosti protezanja linearnog koncepta na nelinearne sustave. Primjerice, bifurkcijski nelinearni modovi su u biti nelinearno gibanje, te se ne mogu smatrati nekim analitičkim protezanjem bilo kojeg linearnog moda. Nadalje, NNM-ovi mogu biti stabilni i nestabilni, za razliku od LNM-ova koji su uvijek u stanju neutralne ravnoteže [11].

2. Usporedba linearnog i nelinearnog odgovora na jednostavnim primjerima

Promatra se dinamički odgovor linearnog i nelinearnog sustava s jednim i dva stupnja slobode gibanja, koji su prikazani na slici 1. U slučaju nelinearnog sustava s jednim stupnjem slobode (JS) gibanje je opisano Duffingovom jednadžbom gibanja

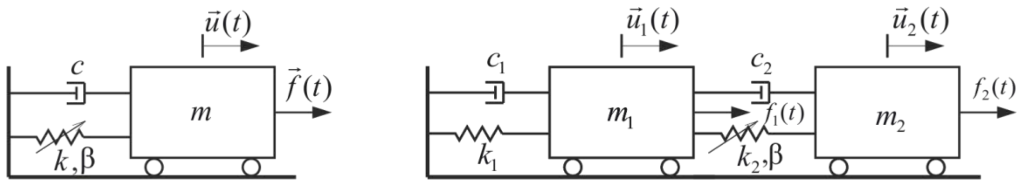
$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku + \beta u^3 = f \sin \Omega t, \tag{1}$$

gdje je nelinearna krutost predstavljena članom βu^3, pri čemu je β koeficijent nelinearne krutosti. Ako je $\beta = 0$ jednadžba (1) postaje linearna. U oba slučaja radi se o prisilnim prigušenim oscilacijama. Sila pobude je harmonijskog tipa, s frekvencijom Ω.

U slučaju sustava s dva stupnja slobode gibanje je opisano sljedećim jednadžbama

$$\begin{aligned} &m_1\ddot{u}_1 + c_1\dot{u}_1 - c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + k_1 u_1 - k_2(u_2 - u_1) - \beta(u_2 - u_1)^3 = f_1 \sin \Omega t, \\ &m_2\ddot{u}_2 + c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + k_2(u_2 - u_1) + \beta(u_2 - u_1)^3 = f_2 \sin \Omega t. \end{aligned} \tag{2}$$

Kao i u slučaju JS sustava, prethodne jednadžbe postaju linearne za $\beta = 0$.



Slika 1. Oscilacijski sustavi s jednim i dva stupnja slobode

Stacionarna rješenja jednadžbi (1) i (2) mogu se dobiti primjerice metodom harmonijske ravnoteže (harmonic balance) [11], gdje se rješenje prikazuje Fourierovim harmonijskim redovima, za svaki stupanj slobode.

$$u_i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_{in} \sin(n\omega t) + b_{in} \cos(n\omega t) \right]. \tag{3}$$

Osnovna frekvencija se podudara s frekvencijom sile pobude. Skraćivanjem prethodnog reda i uzimanjem samo osnovnog harmonika približno rješenje za svaki stupanj slobode može se zapisati u obliku

$$u_i(t) = a_i \sin \omega t + b_i \cos \omega t, \tag{4}$$

gdje su a_i i b_i nepoznati koeficijenti.

Kako se radi o približnoj metodi, jer se ne uzimaju u obzir svi članovi reda, javlja se rezidual. Ortogonalizacija reziduala (Galerkinovi težinski reziduali) u intervalu $(0, 2\pi / \omega)$ daje sustav od 2n algebarskih jednadžbi, čije su nepoznanice koeficijenti a_i i b_i, koji su funkcije parametra ω. Rješenje tog sustava predstavlja krivulju frekvencijskog odgovora prisilnih oscilacija, te skup slobodnih periodičnih neprigušenih gibanja, koji predstavlja modove. Ovo rješenje može se dobiti kao niz točaka, za diskretne vrijednosti frekvencije ω. Najčešće se koristi Newton-Raphsonova metoda za rješavanje tog sustava nelinearnih algebarskih jednadžbi.

U nastavku su dana dva primjera analize linearnih i nelinearnih oscilacija sustava s jednim i dva stupnja slobode.

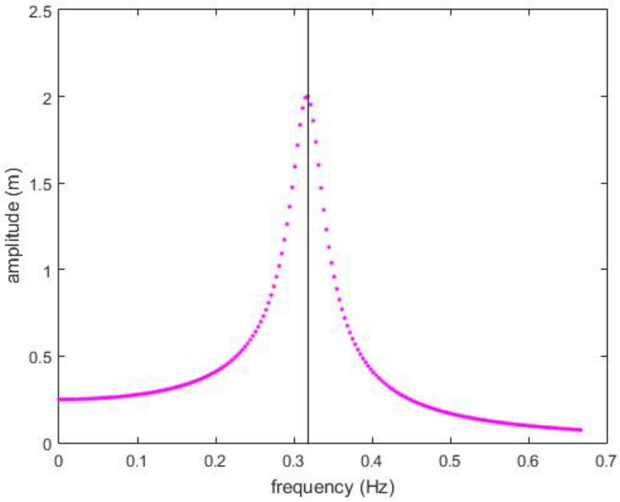
Na slici 2. prikazan je frekvencijski odgovor linearnog JS sustava, s parametrima

$$m = 1.0,\ k = 4.0,\ c = 0.25,\ f = 1.0,\ \beta = 0,$$

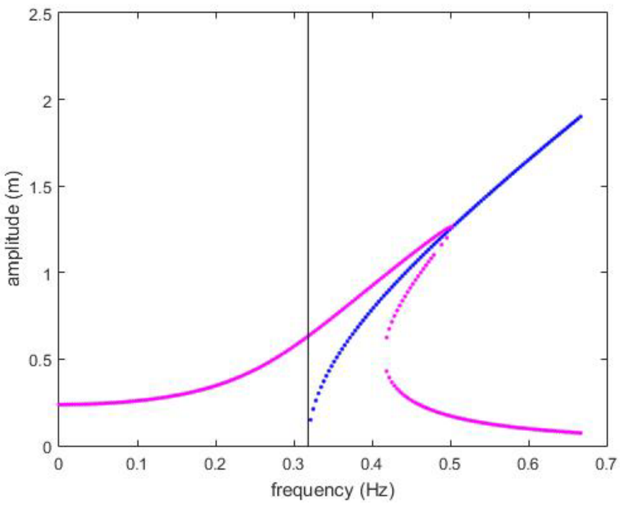
dok je na slici 3. prikazan frekvencijski odgovor nelinearnog JS sustava, s parametrima

$$m = 1.0,\ k = 4.0,\ c = 0.25,\ f = 1.0,\ \beta = 5,$$

Njegova prirodna frekvencija iznosi $f = 1/T = 0.318Hz$.



Slika 2. Frekvencijski odgovor linearnog JS sustava (FRD)



Slika 3. Frekvencijski odgovor nelinearnog JS sustava (FRD)

U slučaju linearnog sustava frekvencija slobodnih periodičnih oscilacija ne ovisi o amplitudama pomaka, odnosno energiji, pa su stoga modalne krivulje vertikalni pravci prikazani na ovim crtežima. Rezonancija se, kod linearnih sustava, javlja u blizini prirodnih frekvencija, dok se ona kod nelinearnih sustava pomiče u odnosu na te frekvencije. To pomicanje može biti udesno ili ulijevo, ovisno o predznaku nelinearnog parametra β. Ovo pomicanje, odnosno savijanje krivulje frekvencijskog odgovora nelinearnih sustava govori da postoji interval frekvencija sile pobude između prirodne frekvencije i neke manje/veće frekvencije, gdje se javljaju točke bifurkacije. Analizom stabilnosti tih stacionarnih rješenja, u tom intervalu frekvencija, pokazalo bi se da su stabilna rješenja s najmanjom i najvećom amplitudom odgovora, dok su ona između nestabilna. Za bilo koju drugu frekvenciju sile pobude, izvan ovog intervala, stacionarno rješenje je jedinstveno i stabilno [11].

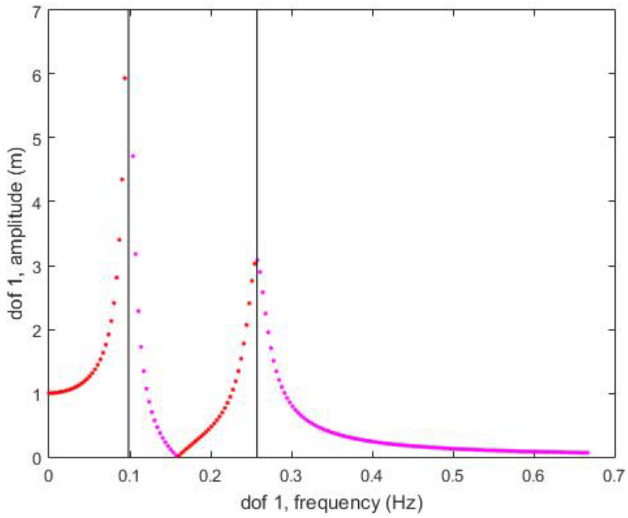
Na slikama 4. i 5. prikazan je frekvencijski odgovor linearnog sustava s dva stupnja slobode, čiji su parametri

$$m_1 = 1.0,\ m_2 = 1.0,\ k_1 = 1.0,\ k_2 = 1.0,\ c_1 = 0.2,\ c_2 = 0.0,\ f_1 = 1.0,\quad f_2 = 0.0,\ \beta = 0.0,$$

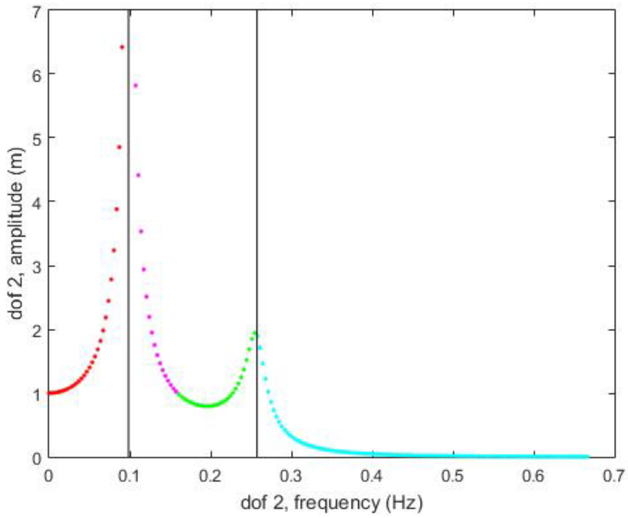
dok je na slikama 6. i 7. prikazan frekvencijski odgovor nelinearnog sustava s dva stupnja slobode, s parametrima

$$m_1 = 1.0,\ m_2 = 1.0,\ k_1 = 1.0,\ k_2 = 1.0,\ c_1 = 0.2,\ c_2 = 0.0,\ f_1 = 1.0,\quad f_2 = 0.0,\ \beta = 0.5.$$

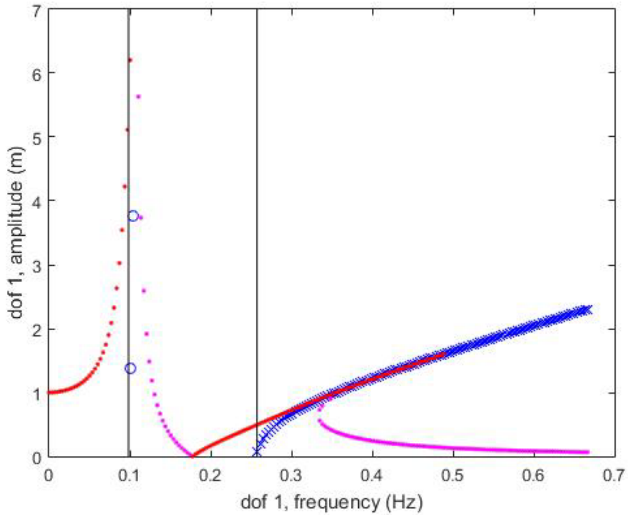
Nelinearni frekvencijski odgovor sustava s dva stupnja slobode analogan je sustavu s jednim stupnjem slobode. Vidljivo je na slikama 4. i 6. da, između dvije rezonancije, postoji frekvencija pri koji je amplituda prve mase jednaka nuli. Stoga je ukupna energija sadržana u gibanju druge mase i prigušenju. Ova pojava naziva se tuning (fino podešavanje), te ima značajnu primjenu u kontroli mehaničkih vibracija. Kod nelinearnih sustava energija se može prenositi s jednog moda na drugi, što dovodi do njihove promjene (lokalizacija) [12]. Bitno svojstvo nelinearnih sustava je što odgovor može sadržavati harmonike i subharmonike, što znači da odgovor može sadržavati frekvencije koje su različite od frekvencija pobude. Ova činjenica ne vrijedi za linearne sustave, gdje su frekvencije odgovora i pobude jednake.



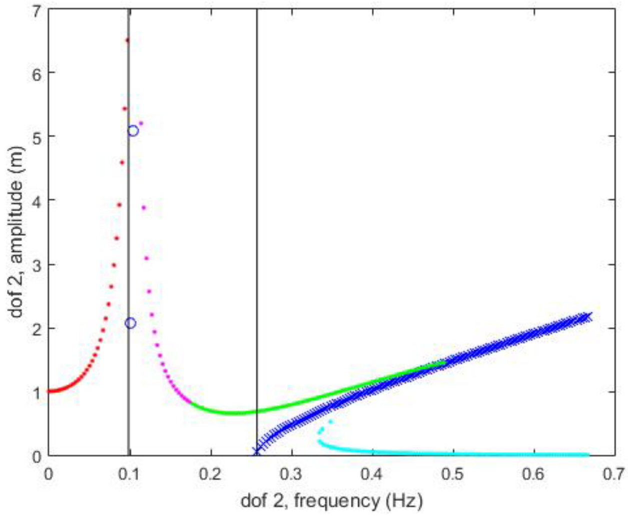
Slika 4. Frekvencijski odgovor linearnog sustava s dva stupnja slobode (prvi stupanj)



Slika 5. Frekvencijski odgovor linearnog sustava s dva stupnja slobode (drugi stupanj)



Slika 6. Frekvencijski odgovor nelinearnog sustava s dva stupnja slobode (prvi stupanj)



Slika 7. Frekvencijski odgovor nelinearnog sustava s dva stupnja slobode (drugi stupanj)

3. Koncept nelinearnih normalnih modova

U linearnoj teoriji vlastiti oblici (modovi) diskretnih ili kontinuiranih sustava koriste se za razdvajanje sustava jednadžbi gibanja, tako da se svaka od njih može zasebno riješiti u prostoru modalnih koordinata. Slobodne ili prisilne oscilacije nekog linearnog sustava s više stupnjeva slobode mogu se zatim dobiti superpozicijom modalnih odgovora. Broj normalnih modova (NM) linearnog sustava ne može biti veći od broja stupnjeva slobode, dok to ne vrijedi za nelinearne sustave zbog pojave bifurkacije normalnih modova.

U slučaju linearnih sustava normalni modovi su neovisni i nema razmijene energije između njih, dok kod linearnih sustava dolazi do prenošenja energije s jednog moda na drugi.

Prvu definiciju NNM-ova dao je Rosenberg [2]. On je definirao NNM-ove kao sinkronizirane periodične oscilacije, gdje svi stupnjevi slobode osciliraju s istom frekvencijom, te istim omjerom pomaka. To znači da svi stupnjevi slobode sustava moraju doseći ekstremne vrijednosti u istom trenutku. Ova definicija ima dva nedostatka. Prvi je u tome što se ona ne može odnositi na ne konzervativne sustave. Drugi nedostatak leži u činjenici što ova definicija ne pokriva mogućnost pojave unutarnje rezonancije. Ovaj nedostatak može se popraviti ako se definicija proširi na ne nužno sinkrono periodično gibanje, jer u slučaju unutarnje rezonancije gibanje je i nadalje periodično.

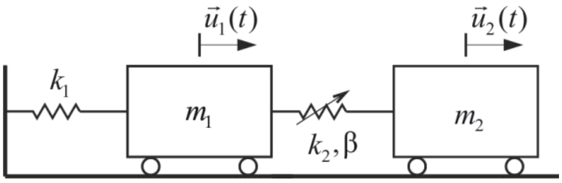
Drugu definiciju NNM-ova , s proširenjem na prigušene sustave, dali su Shaw i Pierre [6]. Oni su NNM-ove definirali kao 2D invarijantne ravnine (površine) u faznom prostoru, koje su tangentne na linearne ravnine u položaju ravnoteže [12].

Postoji više analitičkih i numeričkih metoda za određivanje NNMova. Od analitičkih mogu se spomenuti metoda harmonijske ravnoteže (harmonic balance), formulacija utemeljena na energiji, pristup invarijantnim prostorima (invarijant manifold approach), metoda višestrukih skaliranja (method of multiple scales). Numeričke metode su korisnije od analitičkih jer su analitičke metode ograničene na jednostavnije sustave s malim brojem stupnjeva slobode i sa slabom nelinearnošću. Od numeričkih metoda najčešće se koristi Runge-Kutta i Newmarkova metoda, te kontinuacijske metode.

Prema Vakakisu, Kerschenu i drugim autorima rezultati numeričke analize NNMova prikazuju se grafički (FRP), slike 9. i 14. Tu se prikazuju grane NNMova kao sekvence diskretnih točaka, koje predstavljaju NNMove. U sljedećim primjerima korišten je program NNMcont [13, 14, 15] za dobivanje NNMova. NNMovi imaju putanje u faznom prostoru, koje se mogu prikazati na dva načina. Prvi je preko modalnih krivulja (slike 10, 12, 15 i 17), a drugi je preko grafičkog prikaza razvoja NNMova za bilo koji stupanj slobode (slike 11, 13, 16 i 18).

Ovdje je analiziran primjer s dva stupnja slobode, čije je gibanje opisano jednadžbama

$$\begin{aligned} m_1\ddot{u}_1 + k_1u_1 - k_2\left(u_2-u_1\right) - \beta\left(u_2-u_1\right)^3 &= 0 \\ m_2\ddot{u}_2 + k_2\left(u_2-u_1\right) + \beta\left(u_2-u_1\right)^3 &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

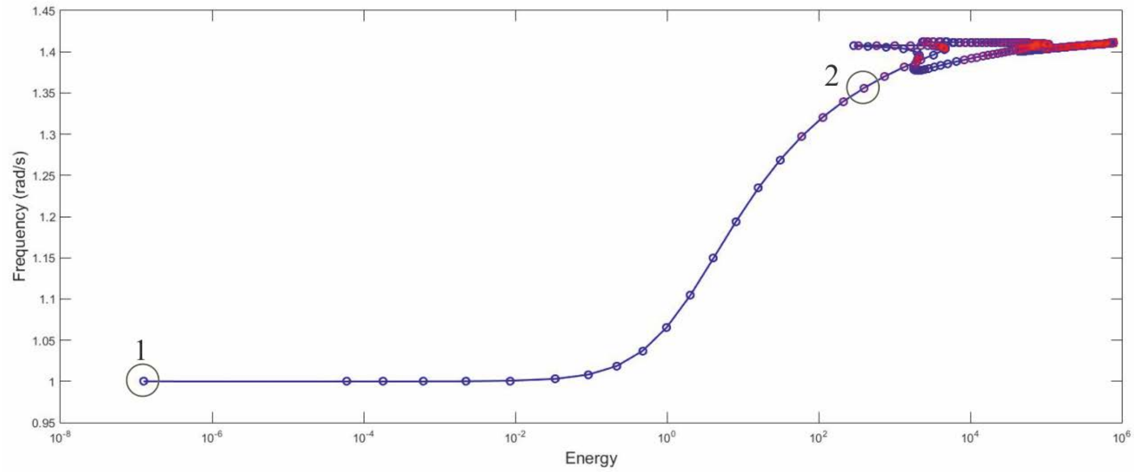


Slika 8. Oscilacijski sustav s dva stupnja slobode

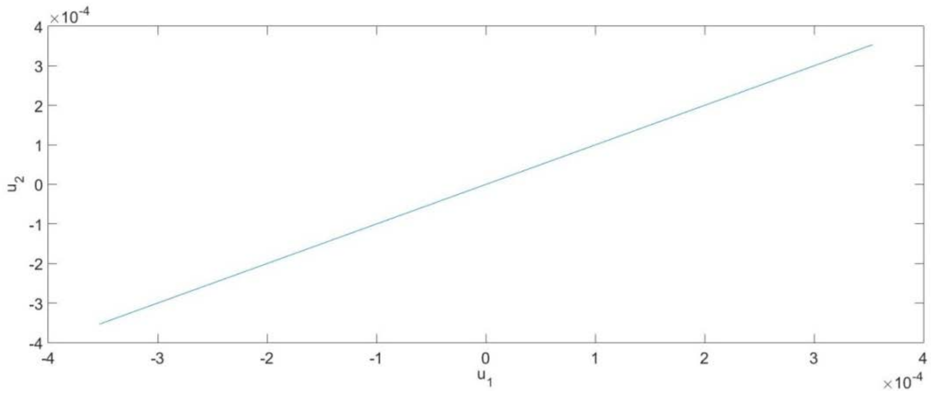
Parametri sustava su

$$m_1 = 1.0,\ m_2 = 1.0,\ k_1 = 1.0,\ k_2 = 1.0,\ \beta = 0.5.$$

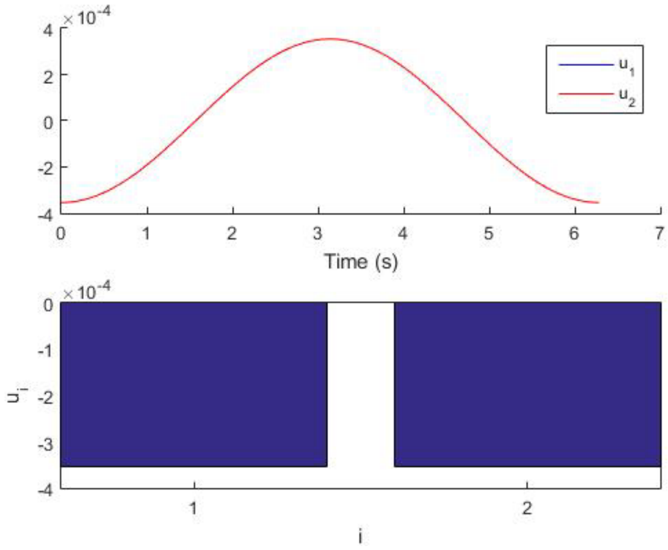
Na slici 9. prikazana je grana prvog NNM, na slici 10. prikazana je modalna krivulja za točku 1, dok je na slici 11. prikazan vremenski razvoj pomaka i amplitude pomaka za tu istu točku. Vidljivo je da se modovi s nižom energijom podudaraju s linearnim normalnim modovima. Mase osciliraju u fazi i nema prijenosa energije s jedne mase na drugu, što se jasno vidi na slici 11. Crvene točke na slici 9. predstavljaju nestabilne modove, s točkama bifurkacije. U tom području postoji više od jednog moda, u odnosu na linearni mod, što je posljedica unutarnje rezonancije.



Slika 9. Prva grana NNM (FRP)

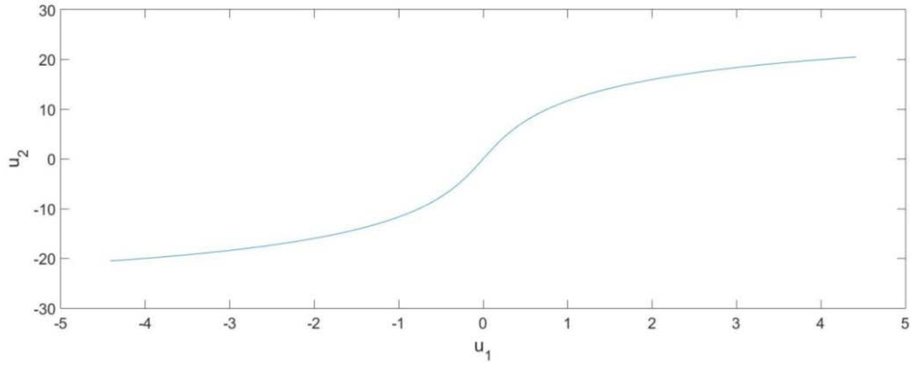


Slika 10. Modalna krivulja za točku 1 (prvi NNM)

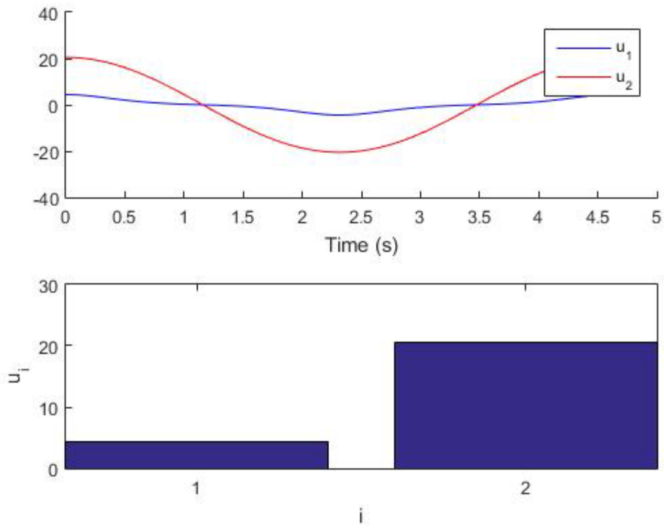


Slika 11. Vremenski razvoj pomaka i amplituda za točku 1

Na slici 12. prikazana je modalna krivulja za točku 2 (slika 9.). Vidljivo je da s povećanjem energije moda on postaje nelinearan. Mase osciliraju izvan faze, a energija se prenosi s prve na drugu masu.

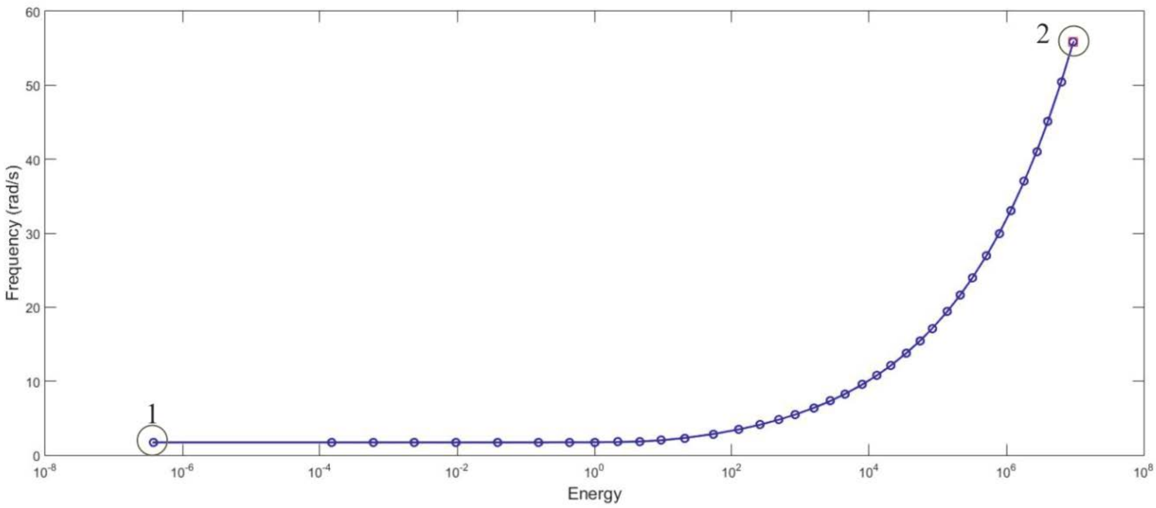


Slika 12. Modalna krivulja za točku 2 (prvi NNM)



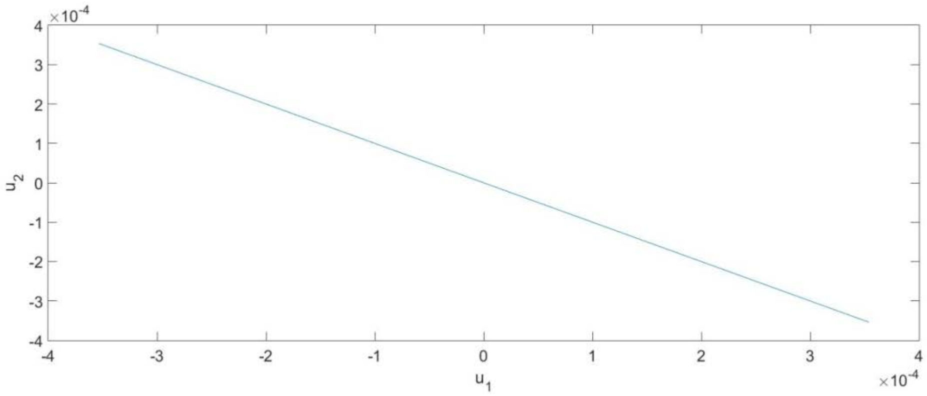
Slika 13. Vremenski razvoj pomaka i amplituda za točku 2

Na slici 14. prikazana je druga grana. Kako je u ovom primjeru usvojena krutost sa zakonom ojačanja, frekvencija slobodnih periodičnih oscilacija se povećava s povećanjem amplitude.

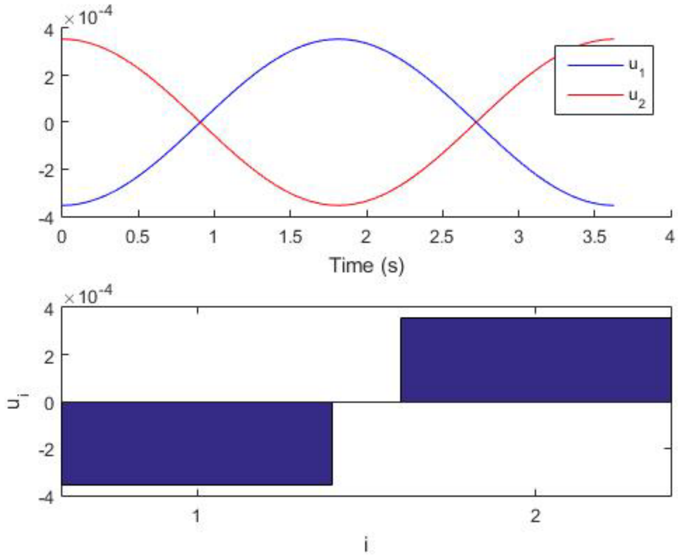


Slika 14. Druga grana NNM (FRP)

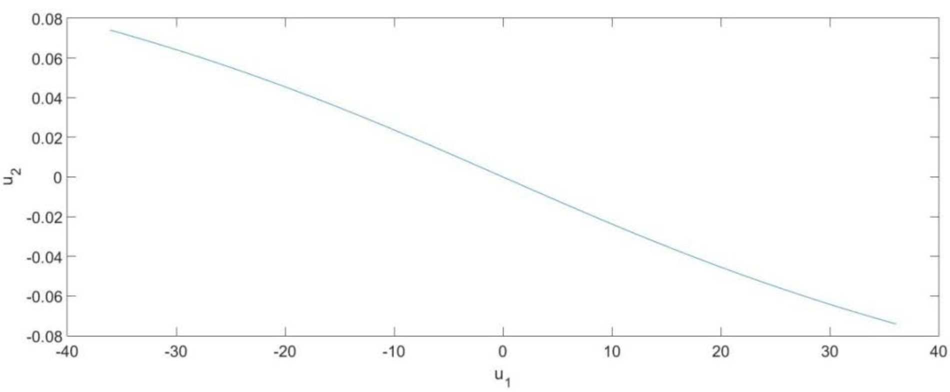
Svi modovi na ovoj grani su stabilni i simetrični. Na slici 15. prikazana je modalna krivulja za točku 1, sa slike 14., u faznom prostoru. Kao i kod prve grane i ovdje se vidi da se pri niskim energijama linearni i nelinearni modovi podudaraju. Sa slike 16. vidljivo je kako obje mase osciliraju periodično, izvan faze, te da se javlja prijenos energije s prve na drugu masu.



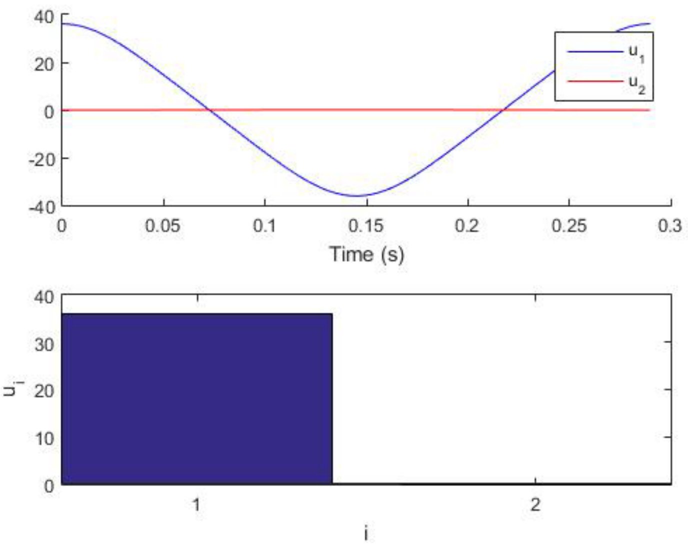
Slika 15. Modalna krivulja za točku 1



Slika 16. Vremenski razvoj pomaka i amplituda za točku 1



Slika 17. Modalna krivulja za točku 2



Slika 18. Vremenski razvoj pomaka i amplituda za točku 2

Na slici 17. prikazan je modalna krivulja, u faznom prostoru, za točku 2 sa slike 14. U toj situaciji ukupna energija sustava nalazi se u prvom stupnju, dok je amplituda dugog stupnja jednaka nuli, što je vidljivo na slici 18. Na ovoj drugoj grani nema točaka bifurkacije, a time ni novih grana. Oscilacije obiju masa su izvan faze, dok im se osnovna frekvencija povećava, što dovodi do smanjenja minimalnog perioda.

4. Zaključci

U području dinamike konstrukcija nelinearna modalna analiza (NMA) se javlja kao skup metoda koje predstavljaju proširenje klasične linearne modalne analize (LMA), za analizu nelinearnih dinamičkih sustava. Razvoj eksperimentalne i analitičke modalne analize ide u korak, te je za dobivanje dinamičkog odgovora poželjno koristiti njihovu kombinaciju. Dobru procjenu nelinearnih parametra (krutost i prigušenje) može dati eksperimentalna analiza, što je osnovni preduvjet svake nelinearne analize, bilo da je ona analitička ili numerička. Nelinearna modalna analiza predstavlja zanimljivo područje istraživanja koje se stalno širi i donosi nove spoznaje i rezultate. Ona pomalo ulazi i u praktično područje primjene zbog svog potencijala u nelinearnom modeliranju realnih dinamičkih sustava.

5. Literatura

1. D. J. Ewins, *Modal Testing: theory, practice and application*, Research Studies Press LTD, London, 2000.
2. R. M. Rosenberg, *Normal modes of nonlinear dual-mode systems,* Journal of Applied Mechanics, 27(2): 263-268, 1960.
3. R. M. Rosenberg, *The normal modes of nonlinear n-degree-of-freedom systems*, Journal of Applied Mechanics, 29(1): 7-14, 1962.
4. J. C. Slater, *A numerical method for determining nonlinear normal modes*, Nonlinear Dynamics, 10(1): 19-30, 1996.
5. R. Arquier, S. Bellizzi, R. Bouc and B. Cochelin, *Two methods for the computation of nonlinear modes of vibrating systems at large amplitudes*, Computers and Structures, 84(24-25): 1565-1576, 2006.
6. S. W. Shaw, and C. Pierre, *Normal modes for non-linear vibrating systems*, Journal of Sound and Vibration, 164: 40, 1993.
7. S. W. Shaw and C. Pierre, *Normal modes of vibration for non-linear continous systems*, Journal of Sound and Vibration, 169(3): 319-347, 1994.
8. D. Laxalde, F. Thouverez and J. J. Sinou, *Dynamics of linear oscilator connected to a small strongly non-linear hysteresic absorber*, International Journal of Non-linear Mechanics, 41(8). 969-978, 2006.
9. F. Blanc, C. Touze, J. F. Mercier, K. Ege and A. S. Bonnet Ben-Dhia, *On the numerical computation of nonlinear normal modes for reduced-order modelling of conservative vibratory systems*, Mechanical Systems and Signal Processing, 36(2): 520-539, 2013.
10. A. F. Vakakis, Nonlinear normal modes (NNMs) and their application in vibration theory: an overview, Mechanical Systems and Signal Processing, 11(1): 3-22, 1997.
11. A. H. Nayfeh, D. T. Mook, *Nonlinear oscilations,* Wiley, 2nd edition, 1995.
12. A. S. Bernadez, *Nonlinear Normal Modes in Mechanical Systems: Concept and Computation with Numerical Continuation,* University of Madrid, 2016.

13. G. Serandour, G. Kerschen, M. Peeters, R. Vigie, J. C. Golinvar, *Computation of nonlinear normal modes, part i: Numerical continuation in Matlab,* 2008.
14. G. Serandour, G. Kerschen, M. Peeters, R. Vigie, J. C. Golinvar, *Computation of nonlinear normal modes, part ii: Towards a practical computation using numerical continuation techniques,* 2008.
15. G. Kerschen, M. Peeters, L. Rendson, *Nnm computation in Matlab,* slideshow, October 2011.