

Jacksonovi i Morelandovi nomogrami

Ante Šaravanja

Sveučilište u Mostaru, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, mag., građ.,
ante.saravanja@fgag.sum.ba

Sažetak: U radu je objašnjena metoda izrade Jacksonovih i Morelandovih nomograma koji služe za određivanje efektivne duljine izvijanja nosivih elemenata opterećenih na tlak. Rezultat rada je primjenjiv u oblastima za proračun i dimenzioniranje nosivih konstrukcija.

Ključne riječi: nomogram, efektivna duljina izvijanja, horizontalno nepomične konstrukcije, horizontalno pomične konstrukcije

The Jackson and Moreland Alignment Charts

Abstract: The paper explains the method of developing the Jackson and Moreland alignment charts, which are used to determine the effective buckling length of load-bearing elements subjected to compressive loading. The result of the paper is applicable in the fields of calculation and dimensioning of load-bearing structures.

Key words: alignment chart, effective buckling length, horizontally immovable structures, horizontally movable structures

1. UVOD

Izvijanje nosivih elemenata opterećenih na tlak predstavlja problem kod dimenzioniranja konstrukcija. Pojava izvijanja, kao neželjena posljedica pri izvođenju i upotrebi konstrukcija, obrađena je u pravilnicima i normativima za dimenzioniranje nosivih konstrukcija u graditeljstvu. Izvijanje posebno dolazi do izražaja kod vitkih i visokih na tlak opterećenih elemenata te su zato potrebni dodatni proračuni.

Vitki tlačni elementi okvirnih, rešetkastih i sličnih konstrukcija najčešće već u početku opterećenja nisu ravni, kako je projektom predviđeno, već su iskrivljeni. Početne krivine mogu biti geometrijskog ili statičkog porijekla. Geometrijske krivine (deformacije), koje su posljedica netočne izvedbe ili nekoga drugog uzroka, uzima se da prate oblik izvijanja centrički napreznih elemenata. Statičke krivine, koje su posljedica djelovanja momenta savijanja uzduž osi elementa, ovise o promjeni statičkih veličina po dužini elementa, o načinu priključenja elementa (rubni uvjeti), prisutnosti poprečnog opterećenja i vitkosti elementa. Progibi, koji su posljedica tih djelovanja mogu biti znatni i ne smiju se zanemarivati. Stabilnost konstrukcije i elementa mora se promatrati na deformiranom sustavu. [1]

Za dio proračuna za stabilnost promatranog nosivog elementa, potrebno je odrediti koeficijent efektivne duljine izvijanja, tj. efektivnu duljinu izvijanja istog elementa. Za određivanje prethodno navedenog koeficijenta, potrebno je izračunati veličine učvršćenja na rubovima vitkog tlačnog elementa.

Nomogram je grafički prikaz ovisnosti dviju ili više veličina, koji omogućava određivanje nepoznatih vrijednosti, tj. nomogram je grafički kalkulator. Sastoji se od više ljestvica postavljenih tako da se ovisnost neke veličine o jednoj ili više drugih veličina može dobiti povlačenjem crte preko grafa ili kakvom drugom jednostavnom kombinacijom točaka na ljestvicama koje tim veličinama odgovaraju. [2]

Jacksonovi i Morelandovi nomogrami su precizni grafički prikazi rješenja koeficijenta duljine izvijanja za moguće vrijednosti učvršćenja na krajevima elementa opterećenog na tlak. Isti nomogrami se koriste pri određivanju efektivne duljine izvijanja stuba kod nosivih konstrukcija. Prvi tip nomograma koristi se za određivanje koeficijenta efektivne duljine izvijanja za horizontalno nepomične konstrukcije. Drugi tip nomograma koristi se za određivanje koeficijenta efektivne duljine izvijanja za horizontalno pomične konstrukcije. Jacksonovi i Morelandovi nomogrami su primjenjivi u oblastima za proračun i dimenzioniranje nosivih konstrukcija.

U ovom radu obrađena je struktura algoritma za izračun mjerodavnih vrijednosti za oblikovanje Jacksonovih i Morelandovih nomograma. Za računski postupak i grafički prikaz korišteni su programski paketi MS Office Excel i programski jezik Python. Rad je koncipiran tako da su u narednom poglavlju prikazane teorijske osnove i pretpostavke neophodne za razumijevanje pristupa izradi Jacksonovih i Morelandovih nomograma. U trećem poglavlju opisana je struktura programa petlji neophodnih za određivanje ordinata u nomogramima. U zaključnom, četvrtom poglavlju prikazani su rezultati kao Jacksonovi i Morelandovi nomogrami. Razvijeni Jacksonovi i Morelandovi nomogrami imaju gušću rezoluciju skala čime je moguće odrediti točnije i preciznije tražene vrijednosti, koje imaju značaj za daljnji proračun u dimenzioniranju vitkih, na tlak opterećenih elemenata.

2. JEDNADŽBE, DIJAGRAMI JEDNADŽBI I PRETPOSTAVKE

2.1. Jednadžbe za horizontalno nepomične i pomične konstrukcije

Jednadžba koja opisuje korelaciju između koeficijenta efektivne duljine izvijanja K (β) i koeficijenta učvršćenja na krajevima stuba GA (KA) i GB (KB) za horizontalno nepomične konstrukcije dana je u nastavku: [3]

Šaravanja, A.
Jacksonovi i Morelandovi nomogrami

$$\frac{G_A G_B}{4} \left(\frac{\pi}{K}\right)^2 + \left(\frac{G_A + G_B}{2}\right) \left[1 - \frac{(\pi/K)}{\tan(\pi/K)}\right] + \frac{2 \tan(\pi/(2K))}{(\pi/K)} - 1 = 0 \quad (1)$$

odnosno:

$$\frac{K_A K_B}{4} \left(\frac{\pi}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{K_A + K_B}{2}\right) \left[1 - \frac{(\pi/\beta)}{\tan(\pi/\beta)}\right] + \frac{2 \tan(\pi/(2\beta))}{(\pi/\beta)} - 1 = 0 \quad (2)$$

Jednadžba koja opisuje korelaciju između koeficijenta efektivne duljine izvijanja K (β) i koeficijenata učvršćenja na krajevima stuba G_A (K_A) i G_B (K_B) za horizontalno pomične konstrukcije dana je u nastavku: [4]

$$\frac{G_A G_B (\pi/K)^2 - 36}{6(G_A + G_B)} - \frac{(\pi/K)}{\tan(\pi/K)} = 0 \quad (3)$$

odnosno:

$$\frac{K_A K_B (\pi/\beta)^2 - 36}{6(K_A + K_B)} - \frac{(\pi/\beta)}{\tan(\pi/\beta)} = 0 \quad (4)$$

gdje su jednadžbama (1), (2), (3) i (4):

G_A (K_A) - koeficijent ukrućenja stuba na vrhu stuba u čvoru A,

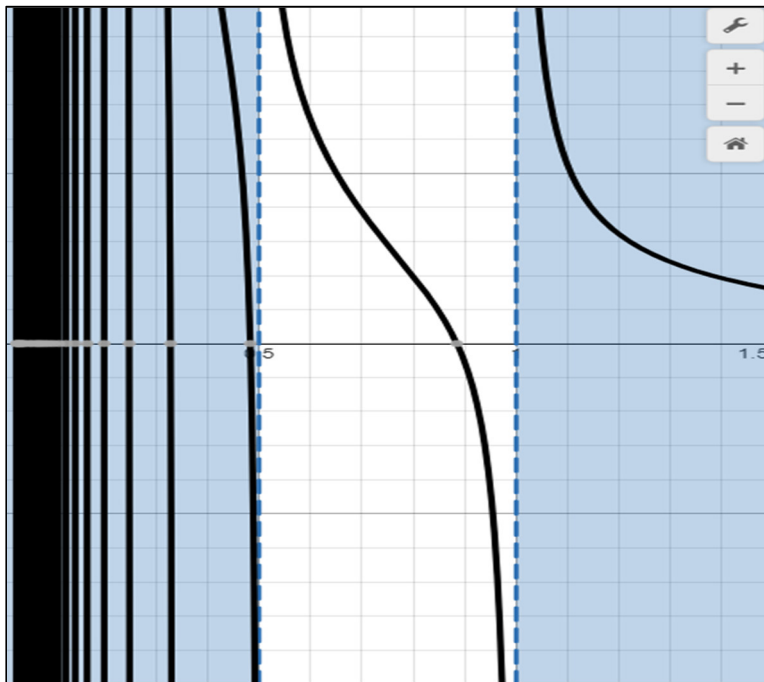
G_B (K_B) - koeficijent ukrućenja stuba na dnu stuba u čvoru B,

K (β) - koeficijent efektivne duljine izvijanja stuba od čvora A do čvora B.

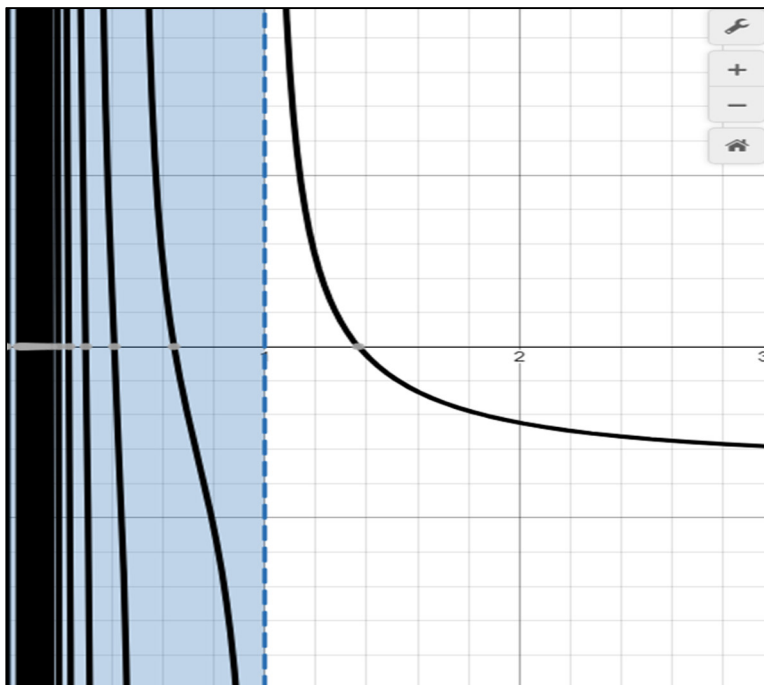
2.2 Dijagrami jednadžbi za horizontalno nepomične i pomične konstrukcije

Na dijagramima se može primijetiti da jednadžbe imaju puno nultočaka odnosno rješenja. Zbog toga problem traženja željenog rezultat riješen je primjenom metode bisekcije u intervalima u kojima se nalazi tražena vrijednost. Metoda bisekcije primjenjiva je za situacije horizontalno nepomičnih i pomičnih konstrukcija.

Šaravanja, A.
Jacksonovi i Morelandovi nomogramni



Slika 1. Dijagram sa jednažbom (1) ili (2) za horizontalno nepomične konstrukcije (područje bisekcije je u intervalu $[0.5, 1.0]$ - nezatamnjeno područje) [5]



Slika 2. Dijagram sa jednažbom (3) ili (4) za horizontalno pomične konstrukcije (područje bisekcije je u intervalu $[1.0, [10]^{100}]$ - nezatamnjeno područje) [5]

2.3 Pretpostavke

Pretpostavke za proračun ordinata karakterističnih vrijednosti na nomogramima dane su u nastavku:

- Broj beskonačno ∞ sa prethodnih nomograma je zaokružen na broj 10^{100} .
 - Zbog lakšeg proračuna i razumijevanja oblikovanja nomograma.
 - Broj 10^{100} dobro simulira broj beskonačno ∞ u rezultatima mjerodavnim za oblikovanje nomograma. Povećavanjem broja eksponenta 100 ne primijeti se razlika u rezultatima. Broj eksponenta 100 bi mogao biti i manji, a isto se ne bi primijetila razlika u rezultatima mjerodavnim za oblikovanje nomograma.
 - Metodom bisekcije, da bi se došlo od broja 10^{100} do broja sa 16 decimalnih mjesta, potrebno je $= \log_2 10^{(100+16)} = +385 \approx 400$ koraka, što nije velik broj koraka za današnja računala.
 - U proračun se neće unositi brojevi veći od broja 10^{100} .
- Svaka nacrtana kosa i ravna crta na nomogramima daje točan rezultat tražene vrijednosti.
- Osi za veličine učvršćenja G_A i G_B (K_A i K_B) su jednake i imaju jednake ordinate za karakteristične vrijednosti.

3. STRUKTURA IZRAČUNA PETLJE

U nastavku je objašnjena struktura algoritma za računanje mjerodavnih vrijednosti ordinata za slučajeve nomograma za horizontalno nepomične i horizontalno pomične konstrukcije. Isti algoritam se sastoji od niza petlji kako slijedi:

- petlje (P1) za numeričko računanje $K(\beta)$ za ulazne vrijednosti $G_A(K_A)$ i $G_B(K_B)$,
- petlje (P2) za numeričko računanje $G_A = G_B$ ($K_A = K_B$) za ulaznu vrijednost $K(\beta)$,
- petlje za numeričko računanje ordinate y za vrijednost $G_A(K_A)$ i $G_B(K_B)$,
- petlje za numeričko računanje ordinate y za vrijednost $K(\beta)$.

3.1 Petlja (P1) traženja vrijednosti $K(\beta)$ za ulazne vrijednosti $G_A(K_A)$ i $G_B(K_B)$

Petlja traženja vrijednosti $K(\beta)$ za ulazne vrijednosti koeficijenata ukrućenja $G_A(K_A)$ i $G_B(K_B)$ traži rezultat metodom bisekcije u intervalima:

- za horizontalno nepomične konstrukcije $K \in [0.5, 1.0]$ ($\beta \in [0.5, 1.0]$),
- za horizontalno pomične konstrukcije $K \in [1.0, 10^{100}]$ ($\beta \in [1.0, 10^{100}]$).

U ovoj petlji se izračunavaju vrijednosti $K(\beta)$ u jednadžbama (1) ili (2) za horizontalno nepomične konstrukcije i u jednadžbama (3) ili (4) za horizontalno pomične konstrukcije. Ovom petljom se računa vrijednost $K(\beta)$ za ulazne pozitivne vrijednosti koje su veće od nule.

Da bi se izbjegle numeričke greške koje se pojavljuju za slučaj malih ulaznih vrijednosti manjih od $\sim 10^{-10}$, u petlji (P1) preporuča se zaokruživanje ulaznih brojeva, koji su pozitivni i teže nuli ($G_A \rightarrow 0$ ($K_A \rightarrow 0$) i $G_B \rightarrow 0$ ($K_B \rightarrow 0$)), na proizvoljni i testirani broj 10^{-7} .

3.2 Petlja (P2) traženja vrijednosti $G_A = G_B$ ($K_A = K_B$) za ulaznu vrijednost $K(\beta)$

Pojednostavljena jednadžba za horizontalno nepomične konstrukcije sa dvije nepoznate veličine $G_{A,B} = G_A = G_B$ ($K_{A,B} = K_A = K_B$) i $K(\beta)$, dana je u nastavku:

$$\frac{G_{A,B}^2}{4} \left(\frac{\pi}{K}\right)^2 + G_{A,B} \left[1 - \frac{(\pi/K)}{\tan(\pi/K)}\right] + \frac{2 \tan(\pi/(2K))}{(\pi/K)} - 1 = 0 \quad (5)$$

odnosno:

$$\frac{K_{A,B}^2 \left(\frac{\pi}{\beta}\right)^2}{4} + K_{A,B} \left[1 - \frac{(\pi/\beta)}{\tan(\pi/\beta)}\right] + \frac{2 \tan(\pi/(2\beta))}{(\pi/\beta)} - 1 = 0 \quad (6)$$

Pojednostavljena jednačba za horizontalno pomične konstrukcije sa dvije nepoznate veličine $G_{A,B} = G_A = G_B$ ($K_{A,B} = K_A = K_B$) i K (β), dana je u nastavku:

$$\frac{G_{A,B}^2 (\pi/K)^2 - 36}{12 \cdot G_{A,B}} - \frac{(\pi/K)}{\tan(\pi/K)} = 0 \quad (7)$$

odnosno:

$$\frac{K_{A,B}^2 (\pi/\beta)^2 - 36}{12 \cdot K_{A,B}} - \frac{(\pi/\beta)}{\tan(\pi/\beta)} = 0 \quad (8)$$

gdje su (u jednačbama (5), (6), (7) i (8)):

$G_{A,B}$ ($K_{A,B}$) - koeficijent ukrućenja stuba na vrhu i dnu promatranog stuba (u čvoru A i u čvoru B),

K (β) - koeficijent efektivne duljine izvijanja stuba od čvora A do čvora B.

Petlja traženja vrijednosti $G_{A,B} = G_A = G_B$ ($K_{A,B} = K_A = K_B$) za ulaznu vrijednost K (β) traži rezultat jednakih vrijednosti G_A i G_B (K_A i K_B) metodom bisekcije u intervalima:

- za horizontalno nepomične konstrukcije $G_{A,B} \in [0.0, 10^{100}]$ ($K_{A,B} \in [0.0, 10^{100}]$),
- za horizontalno pomične konstrukcije $G_{A,B} \in [0.0, 10^{100}]$ ($K_{A,B} \in [0.0, 10^{100}]$).

U ovoj petlji se izračunavaju vrijednosti $G_{A,B}$ ($K_{A,B}$) u pojednostavljenim jednačbama sa dvije nepoznate veličine, u jednačbama (5) ili (6) za horizontalno nepomične konstrukcije i u jednačbama (7) ili (8) za horizontalno pomične konstrukcije.

3.3 Petlja traženja ordinate y za vrijednost G_A (K_A) i G_B (K_B)

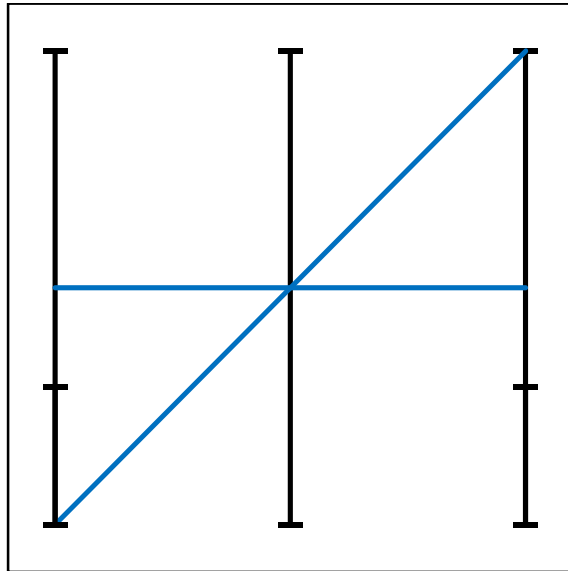
Područje crtanja nomograma je u dvodimenzionalnom koordinatnom sustavu u granicama apscise $x \in [0.0, 1.0]$ i ordinate $y \in [0.0, 1.0]$. Vrijednosti ordinata računaju se petljama dok su vrijednosti apscisa za određene veličine dane u nastavku:

- za veličinu G_A (K_A) $x = 0.0$
- za veličine K (β) $x = 0.5$
- za veličinu G_B (K_B) $x = 1.0$

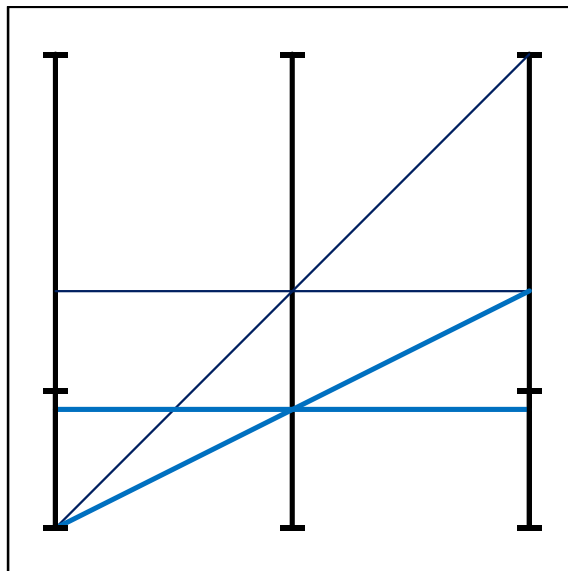
Petlja traženja ordinate y za vrijednosti G_A (K_A) i G_B (K_B) jest po principu, da je broj beskonačno ∞ zaokružen na broj 10^{100} . Prednost navedenog principa jest što računanjem vrijednosti K (β) petljom (P1) sa ulaznim podacima $G_A = 0.0$ i $G_B = 10^{100}$ (tj. $K_A = 0.0$ i $K_B = 10^{100}$) u jednačbu (1) ili (2) i u jednačbu (3) ili (4), dobiva se, osim vrijednosti K (β), vrijednost ordinate y na nomogramima, koja je jednaka u prvom koraku $y = 0.5000$ (Slika 3.). U prvom se koraku poslije petlje (P1) računa petljom (P2) vrijednost jednakih veličina G_A i G_B (K_A i K_B) ($G_A = G_B = K_A = K_B$) i s tim računom se smanjuje područje traženja ordinate za sljedeći korak petlje, koji je kao i prvi korak, kombinacija petlje (P1) i petlje (P2).

Šaravanja, A.
Jacksonovi i Morelandovi nomogram

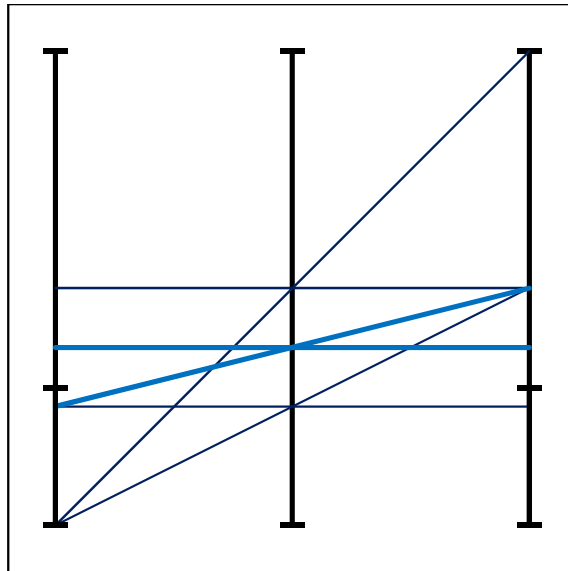
Na slikama u nastavku je prikazano grafički nekoliko prvih koraka pri traženju ordinate y za situaciju horizontalno nepomičnih konstrukcija za vrijednost $G_A=G_B=0.25$ (tj. $K_A=K_B=0.25$). Ovom petljom se daljnjim proračunom na kraju dobije rješenje ordinate, koje je jednako $y=0.2900174850495052$.



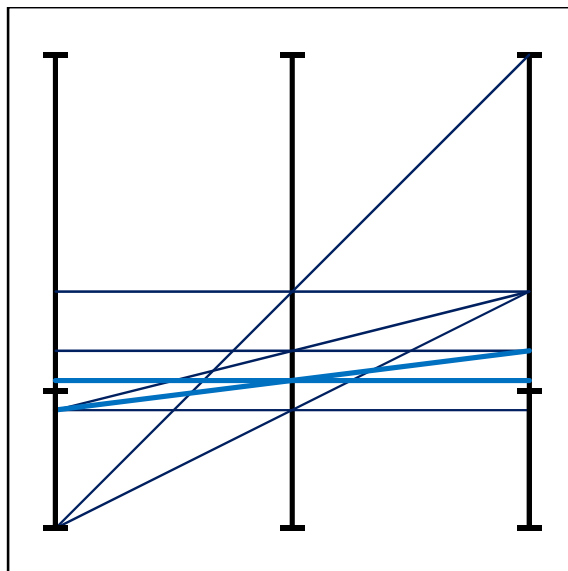
Slika 3. Prvi korak petlje, u kojem je ordinata jednaka $y=0.5000$, u granicama ordinata $y_{\text{donje}}=0.0000$ i $y_{\text{gornje}}=1.0000$



Slika 4. Drugi korak petlje, u kojem je ordinata jednaka $y=0.2500$, u granicama ordinata $y_{\text{donje}}=0.0000$ i $y_{\text{gornje}}=0.5000$



Slika 5. Treći korak petlje, u kojem je ordinata jednaka $y=0.3750$, u granicama ordinata $y_{\text{donje}}=0.2500$ i $y_{\text{gornje}}=0.5000$



Slika 6. Četvrti korak petlje, u kojem je ordinata jednaka $y=0.3125$, u granicama ordinata $y_{\text{donje}}=0.2500$ i $y_{\text{gornje}}=0.3750$

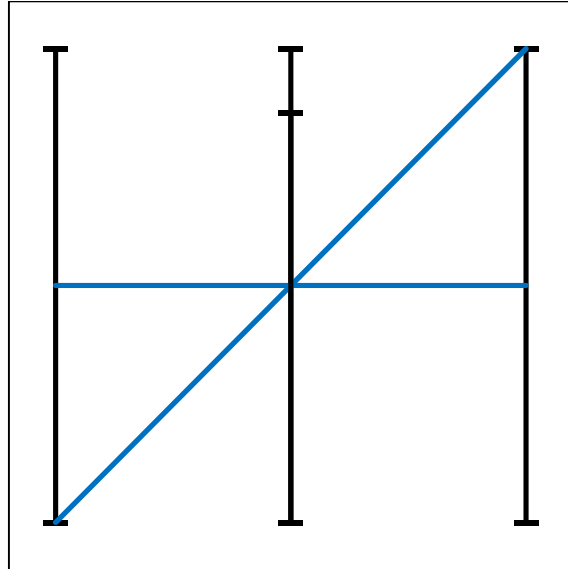
3.4 Petlja traženja ordinate y za vrijednost K (β)

Petlja traženja ordinate y za vrijednosti K (β) jest po principu, da je broj beskonačno ∞ zaokružen na broj $\llbracket 10 \rrbracket^{100}$. Prednost navedenog principa jest što računanjem vrijednosti K (β) petljom (P1) sa ulaznim podacima $G_A=0.0$ i $G_B= \llbracket 10 \rrbracket^{100}$ (tj. $K_A=0.0$ i $K_B= \llbracket 10 \rrbracket^{100}$) u jednadžbu (1) ili (2) i u jednadžbu (3) ili (4), dobiva se, osim vrijednosti K (β),

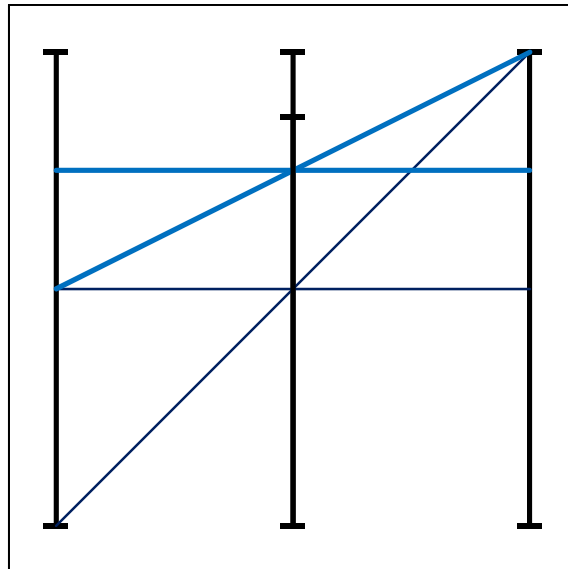
Šaravanja, A.
Jacksonovi i Morelandovi nomogrami

vrijednost ordinate y na nomogramima, koja je jednaka u prvom koraku $y=0.5000$ (Slika 7.). U prvom se koraku poslije petlje (P1) računa petljom (P2) vrijednost jednakih veličina GA i GB (KA i KB) ($G_A=G_B=K_A=K_B$) i s tim računom se smanjuje područje traženja ordinate za sljedeći korak petlje, koji je kao i prvi korak, kombinacija petlje (P1) i petlje (P2).

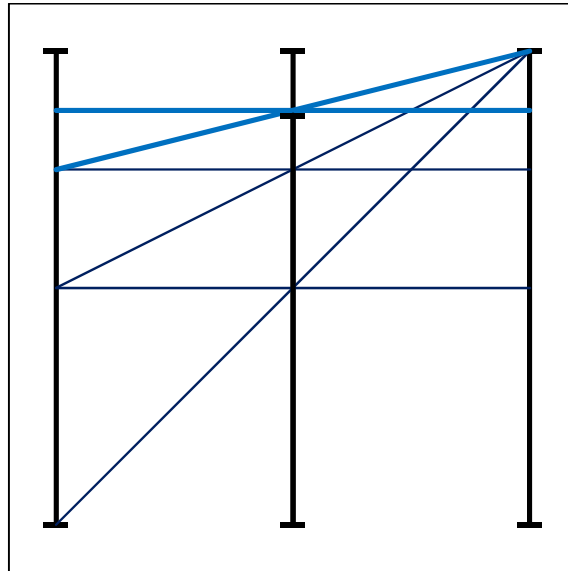
Na slikama u nastavku prikazano je grafički nekoliko prvih koraka pri traženju ordinate y za situaciju horizontalno nepomičnih konstrukcija za vrijednost koeficijenta efektivne duljine izvijanja $K=0.90$ (tj. $\beta=0.90$). Ovom petljom se daljnjim proračunom na kraju dobije rješenje ordinate, koje je jednako $y=0.8644423727655408$.



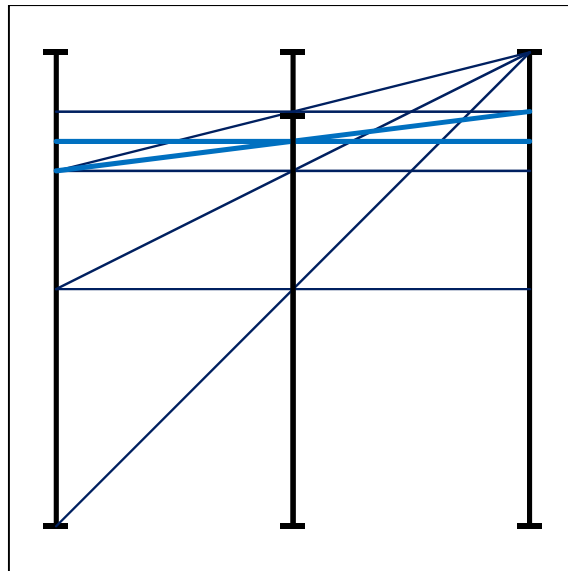
Slika 7. Prvi korak petlje, u kojem je ordinata jednaka $y=0.5000$, u granicama ordinata $y_{\text{donje}}=0.0000$ i $y_{\text{gornje}}=1.0000$



Slika 8. Drugi korak petlje, u kojem je ordinata jednaka $y=0.7500$, u granicama ordinata $y_{\text{donje}}=0.5000$ i $y_{\text{gornje}}=1.0000$



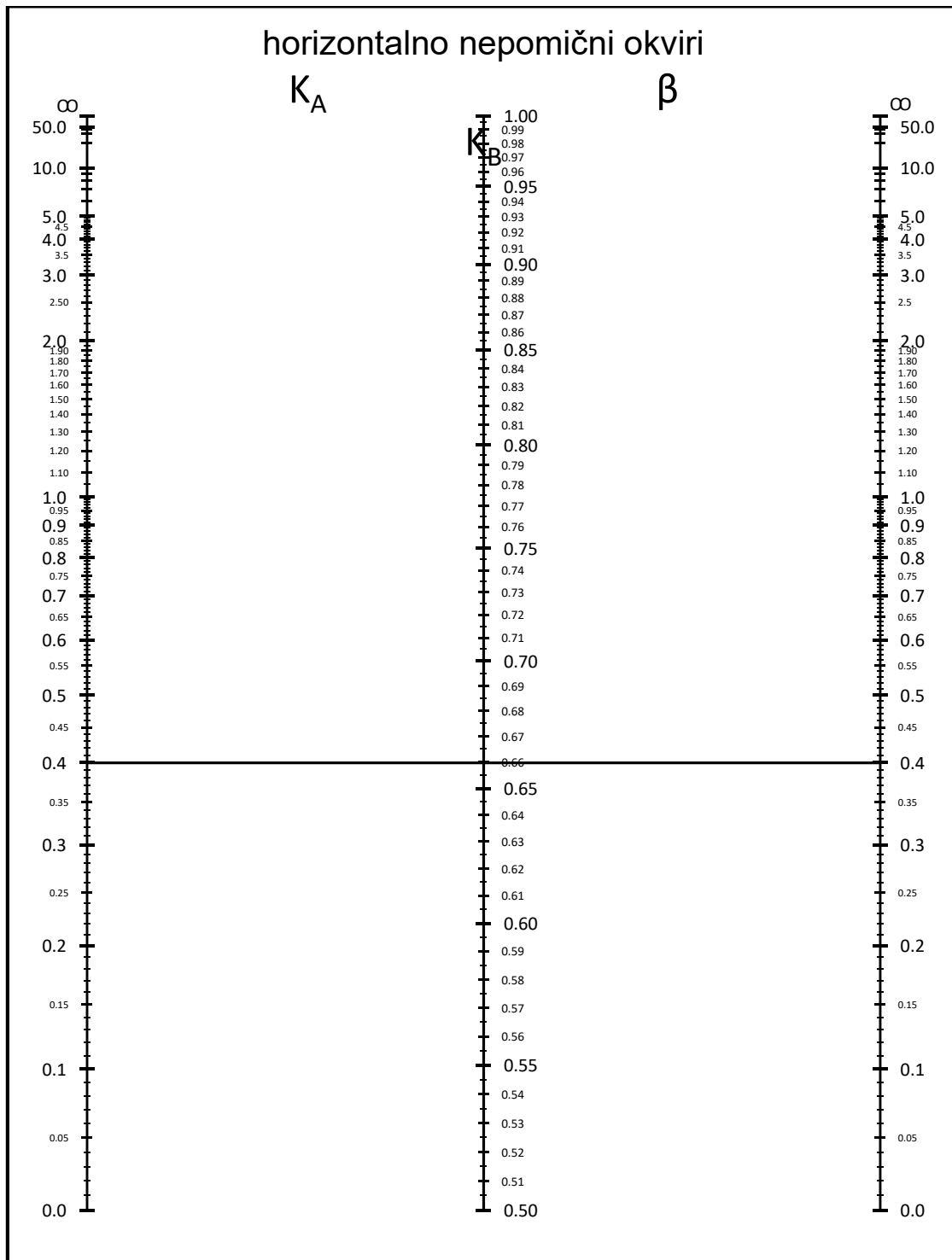
Slika 9. Treći korak petlje, u kojem je ordinata jednaka $y=0.8750$, u granicama ordinata $y_{\text{donje}}=0.7500$ i $y_{\text{gornje}}=1.0000$



Slika 10. Četvrti korak petlje, u kojem je ordinata jednaka $y=0.8125$, u granicama ordinata $y_{\text{donje}}=0.7500$ i $y_{\text{gornje}}=0.8750$

4. JACKSONOVI I MORELANDOVI NOMOGRAMI

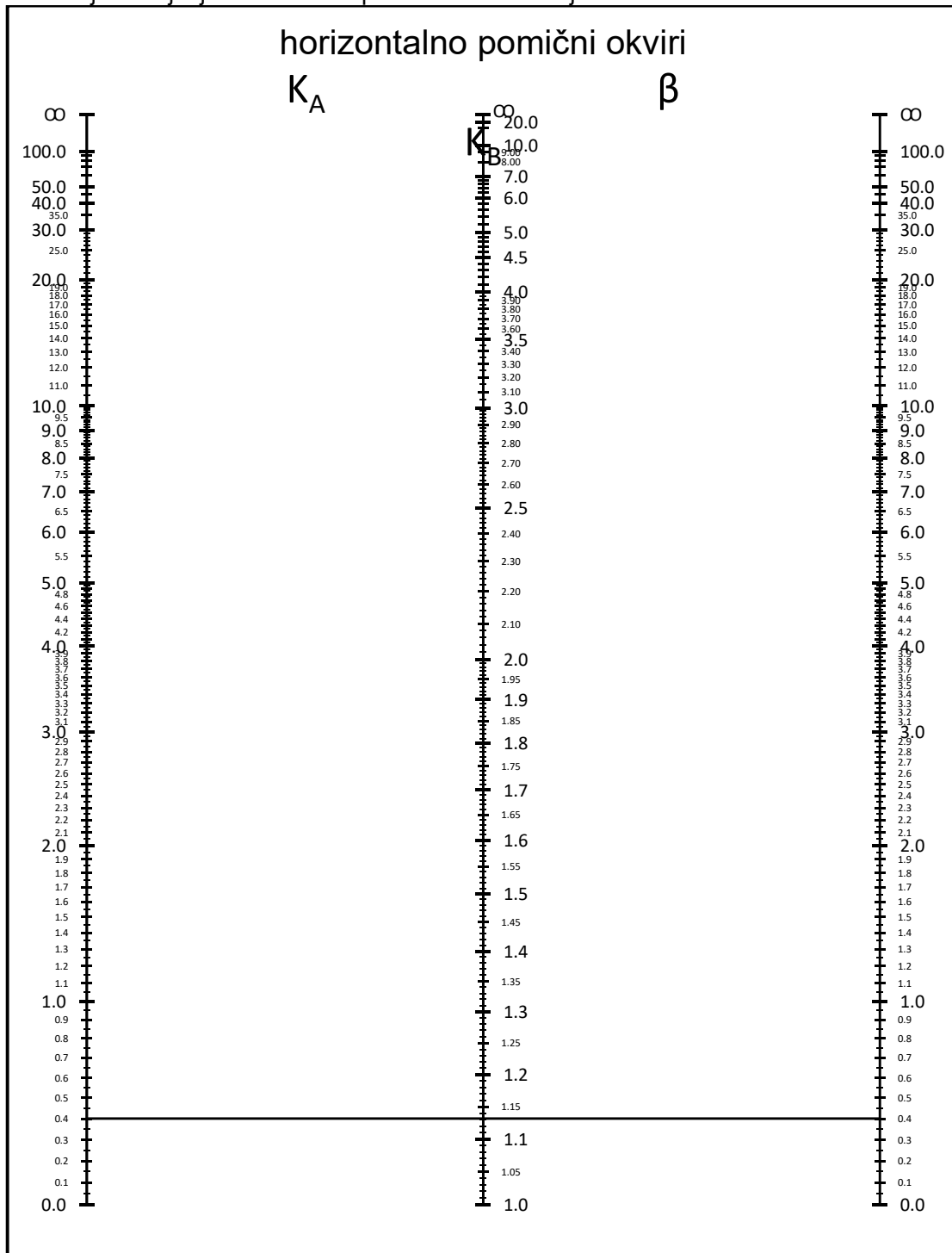
Jacksonovi i Morelandovi nomogrami su grafički kalkulatori i oblikovani su u programu Excel programskog paketa Microsoft Office. Jacksonovi i Morelandovi nomogrami dani su u nastavku. Na slici 11. prikazan je Jacksonov i Morelandov nomogram za određivanje koeficijenta efektivne duljine izvijanja horizontalno nepomičnih konstrukcija.



Slika 11. Nomogram za horizontalno nepomične konstrukcije

Šaravanja, A.
Jacksonovi i Morelandovi nomogrami

Na slici 12. prikazan je Jacksonov i Morelandov nomogram za određivanje koeficijenta efektivne duljine izvijanja horizontalno pomičnih konstrukcija.



Slika 12. Nomogram za horizontalno pomične konstrukcije

Šaravanja, A.

Jacksonovi i Morelandovi nomogrami

Prethodno prikazani Jacksonovi i Morelandovi nomogrami kao grafički kalkulatori sastoje se od tri vertikalne skale za određene veličine kako slijedi:

- G_A (K_A) koeficijent učvršćenja tlačnog elementa na rubu,
- K (β) koeficijent efektivne duljine izvijanja, koji se dobije povlačenjem linije između poznatih točaka na skalama G_A (K_A) i G_B (K_B),
- G_B (K_B) koeficijent učvršćenja promatranog tlačnog elementa na suprotnom rubu.

Na Jacksonovim i Morelandovim nomogramima postoji horizontalna linija kao granica za nepreporučljive manje ulazne vrijednosti učvršćenja G_A (K_A) i G_B (K_B). Koeficijenti učvršćenja ne bi trebali biti manji od $G_A = G_B = K_A = K_B = 0.40$. Također po potrebi, moguće je odrediti i jedan od koeficijenata učvršćenja na rubu tlačnog elementa G_A (K_A) ili G_B (K_B) ako je proračunom zahtijevana određena veličina koeficijenta efektivne duljine izvijanja K (β) i ako je poznat jedan od koeficijenata učvršćenja na suprotnom rubu promatranog tlačno opterećenog nosivog elementa.

LITERATURA

1. Tomičić, I.: Vitki elementi naprezani ekscentričnom tlačnom silom, Betonske konstrukcije, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, str. 343., 1996.
2. <https://www.enciklopedija.hr/clanak/nomogram>
3. ANSI/AISC 360-16, "Appendix 7. Alternative Methods Of Design For Stability, 7.2. Effective Length Method", "Equation C-A-7-1", "Figure C-A-7.1", "Specification For Structural Steel Buildings", American Institute Of Steel Construction, 2016., Str. 571-572.
4. ANSI/AISC 360-16, "Appendix 7. Alternative Methods Of Design For Stability, 7.2. Effective Length Method", "Equation C-A-7-2", "Figure C-A-7.2", "Specification For Structural Steel Buildings", American Institute Of Steel Construction, 2016., Str. 571-572.
5. <https://www.desmos.com/calculator>
6. ANSI/AISC 360-16, "Specification for Structural Steel Buildings", American Institute Of Steel Construction, 2016.
7. ANSI/AISC 360-10, "Specification for Structural Steel Buildings", American Institute Of Steel Construction, 2010.
8. Kavanagh, T. C.: Effective Length of Framed Columns, Transactions of the American Society of Civil Engineers, Vol. 127, str.. 81–101, 1962.
9. <https://smartsteelbuilding.com/how-to-choose-the-effective-length-of-steel-column/>
10. Hasanović, V., Zlatar, M.: Betonske konstrukcije II – Predavanja, Građevinski fakultet u Sarajevu, Sarajevo, 1997.
11. Tomičić, I.: Betonske konstrukcije, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 1996.
12. Drmač, Z., Hari, V., Marušić, M., Rogina, M., Singer, S., Singer, S.: Numerička analiza - Predavanja i vježbe, PMF Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2003.