



## NUMERIČKI MODEL ZA ANALIZU NAKNADNO PREDNAPETIH BETONSKIH KONSTRUKCIJA U RAVNINI

Doc. dr. sc. **Mladen Kožul**, dipl. ing. građ.  
Građevinski fakultet Sveučilišta u Mostaru

**Sažetak:** U ovom radu analiziran je problem vremenski ovisnih deformacija betona, odnosno puzanja i skupljanja, polazeći od fenomenologije problema i njegovog učinka na konstrukcije od armiranog i prednapetog betona. Prikazan je novi numerički model za analizu deformacija puzanja betona u ravnini, utemeljen na korekciji njegovog modula elastičnosti u glavnim pravcima, za trenutno stanje glavnih naprezanja. Korekcija modula elastičnosti ovisi o trenutnom koeficijentu puzanja i trenutnom modulu elastičnosti dobivenom iz jednoosnog radnog dijagrama betona u tlaku. Ovakav pristup dovodi do lokalne ortotropije betona, što se onda reflektira na njegovu matricu krutosti. Na temelju izrađenog računalnog programa izvršena je analiza valjanosti i učinkovitosti razvijenog modela na odgovarajućim primjerima laboratorijski i numerički ispitivanih armiranih i prednapetih betonskih konstrukcija, te na jednom primjeru realne konstrukcije mosta, gdje su eksperimentalno mjereni pomaci tjemena luka tijekom vremena.

**Ključne riječi:** puzanje, skupljanje, armirani beton, prednapeti beton, ortotropija, numerički postupak

## NUMERICAL MODEL FOR ANALYSIS OF SUBSEQUENTLY PRESTRESSED CONCRETE STRUCTURES IN PLANE

**Abstract:** This paper analyzes the problem of time-dependent deformations of concrete, or creep and shrinkage, proceeding from phenomenology of the problem and its effects on reinforced and prestressed concrete structures. It presents a new numerical model for analysis of in-plane concrete creep deformations, based on correction of its modulus of elasticity in principal directions, for current state of principal stresses. The correction of modulus of elasticity depends on current creep coefficient and current elasticity modulus obtained from the uniaxial working diagram of concrete under pressure. Such approach leads to local orthotropy of concrete, which then reflects on its stiffness matrix. Based on the created computer program, validity and efficiency of the developed model were analyzed on adequate examples of laboratory-tested and numerically examined reinforced and prestressed concrete structures, and on one example of actual bridge structure, where displacements of arch top were experimentally measured over time.

**Key words:** creep, shrinkage, reinforced concrete, prestressed concrete, orthotropy, numerical procedure



## 1. UVOD

Analiza vremenski ovisnih deformacija betona, kao što su puzanje i skupljanje, nužno zahtjeva praćenje deformacija betona tijekom vremena te utjecaj tih deformacija na armaturu i čelik za prednapinjanje. Taj utjecaj se prvenstveno reflektira u povećanju deformacija i preraspodjeli naprezanja, te u pojavi pukotina u betonu. Ovaj model uključuje sve bitne nelinearne efekte betona, armature, te čelika za prednapinjanje. Model skupljanja betona je preuzet iz EC-2, dok je za analizu deformacija puzanja razvijen novi numerički postupak koji je inkorporiran u postojeći model /1/, /2/. Ovaj novi numerički postupak je utemeljen na korekciji matrice krutosti betona na razini svake Gauss točke tijekom vremena, uz izbor odgovarajućeg koeficijenta puzanja i jednoosnog radnog dijagrama betona u tlaku /3/.

Poznato je da konačne ili trajne deformacije mogu biti dva i više puta veće od trenutnih elastičnih deformacija armiranih i prednapetih betonskih konstrukcija. Ovo nije bitno samo zbog eksploatacijskih svojstava konstrukcija već i zbog preraspodjele naprezanja i pojave nepredviđenih pukotina u betonu. Danas analiza armiranih i prednapetih betonskih konstrukcija, posebice većih raspona i visina, nema smisla bez uključivanja vremenski ovisnih deformacija betona /4/, /5/, /6/.

Puzanje betona spada u skupinu viskoznih deformacija koje se razvijaju tijekom vremena, a čiji mehanizam razvoja nije u potpunosti razjašnjen do danas. Zbog toga se te deformacije uglavnom opisuju empirijskim izrazima čiji rezultati trebaju odgovarati stvarnim izmjerenim deformacijama puzanja betona.

## 2. NUMERIČKI MODEL NAKNADNOG PREDNAPINJANJA

Pojava pukotina u betonu se, već od početka primjene armiranog betona, smatrala njegovim glavnim nedostatkom, kojega se nastojalo umanjiti, ili potpuno eliminirati. Iz tih nastojanja se rađa ideja prednapinjanja, čija se bit sastoji u tome da se utjecajem izvana u betonu izazovu takva naprezanja koja se suprotstavljaju vanjskim opterećenjima konstrukcije. Na taj način čitav betonski presjek sudjeluje u preuzimanju naprezanja od vanjskog opterećenja, što omogućava uporabu presjeka manjih dimenzija u odnosu na klasični armirani beton.

Postoji čitav spektar mogućnosti što se tiče stupnja prednapinjanja, koji započinje s klasičnim armirano-betonskim konstrukcijama, a završava s potpunim prednapinjanjem. Izbor stupnja prednapinjanja ovisi o ekonomičnosti, vrsti i tipu prednapete konstrukcije, a posebice o uvjetima eksploatacije konstrukcije. S obzirom na stupanj prednapinjanja razlikuje se potpuno i djelomično prednapinjanje. Kod potpunog prednapinjanja u čitavom betonskom presjeku djeluju tlačna naprezanja za konačno opterećenje. Ovaj tip prednapinjanja ima svojih manjkavosti, kao što su: povećanje progiba tijekom vremena, povećan utrošak čelika za prednapinjanje, nepotrebno velika sigurnosti i pojava nepredviđenih pukotina. Stoga se u praksi često koristi djelomično prednapinjanje, gdje se za ekstremna pokretna opterećenja dopušta pojava pukotina ograničenih širina u vlačnim zonama betona /7/, /8/.

S obzirom na vrijeme prednapinjanja razlikuje se prednapinjanje prije stvrdnjavanja betona (prethodno ili adhezijско) i prednapinjanje nakon stvrdnjavanja betona (naknadno). U slučaju adhezijскоg prednapinjanja ono se izvodi na stazi, gdje se najprije izvrši istežanje kabela potrebnom silom, a zatim se element betonira. Ovaj način prednapinjanja se koristi za manje elemente, kao što su razne grede, željeznički pragovi, ploče sa šupljinama, te mali i srednji nosači.



Naknadno ili kabelsko prednapinjanje se izvodi kabelima provučenim kroz prethodno ugrađene čelične savitljive cijevi u betonu. Ovaj tip prednapinjanja se koristi kod jače opterećenih konstrukcija i konstrukcija većih raspona. U ovom slučaju kabeli mogu biti bez spoja, ili sa spojem s betonom. Postoji i slučaj vanjskog prednapinjanja, gdje se kabeli nalaze izvan betonskog presjeka elementa ili konstrukcije.

## 2.1 Materijali u prednapetom betonu

Za izradu prednapetih elemenata ili konstrukcija nužno je koristiti beton i čelik visokih fizičko-mehaničkih svojstava, budući da se i jedan i drugi materijal iskorištavaju do vrlo velikih stupnjeva.

Zbog primjene materijala vrlo dobrih svojstava u prednapetim konstrukcijama moguća je izvedba elemenata manjih poprečnih presjeka, što ima značajnog utjecaja na ekonomičnost gradnje. Osim toga, deformacije prednapetih elemenata su značajno manje od armirano-betonskih. Isto tako je i čvrstoća na zamor prednapetih elemenata veća nego kod drugih konstruktivnih materijala zbog činjenice da su promjene naprezanja vlačne armature male. Korištenje betona visokih svojstava i visoko vrijednih čelika dovelo je do suvremenih prednapetih konstrukcija, čime su postavljeni visoki zahtjevi u pogledu kvalitete i osobina, kako osnovnih materijala, tako i radova na izvođenju ovih konstrukcija.

## 2.2 Numerički model prednapinjanja

Model, koji će ukratko biti opisan u nastavku, je preuzet iz [1]. On opisuje nelinearno ponašanje naknadno prednapetih betonskih konstrukcija u ravnini. Pretpostavljena je idealna veza između betona i kabela za prednapinjanje. Modelom je omogućen opis pravocrtnih i zakrivljenih kabela, izveden jednodimenzionalnim izoparametrijskim tročvornim elementima. Zbog osiguranja kontinuiteta čvorovi kabela se moraju nalaziti na mjestu presjeka dvodimenzionalnih elemenata betona. Ovo se odnosi na krajnje čvorove 1D elementa, dok se koordinate srednjeg čvora određuju razrađenim iterativnim postupkom.

Analiza naknadno prednapetih betonskih konstrukcija ima određeni slijed definiran pojedinim fazama, kako bi se što bolje opisalo stvarno ponašanje takvih konstrukcija. U prvoj fazi konstrukcija se analizira s opterećenjem koje na nju djeluje prije prednapinjanja. To je uglavnom vlastita težina konstrukcije i dio stalnog opterećenja. U drugoj fazi se vrši pojedinačno prednapinjanje kabela, gdje se početna sila prednapinjanja može unijeti odjednom, ili inkrementalno, čime se može vjerno opisati postupak postupnog prednapinjanja. Također je moguće već unesenu silu naknadno smanjiti, što se u praksi ponekad i čini kako bi se, u dijelu kabela, smanjilo visoko početno naprezanje. U trenutku prednapinjanja kabel se ne tretira kao dio konstrukcije, već se koristi samo njegova geometrija za dobivanje početnog utjecaja prednapinjanja u obliku fiktivnog opterećenja. Nakon toga kabeli funkcioniraju kao klasična armatura, sa zadanim početnim naprezanjima. Nakon prednapinjanja svih kabela slijedi treća faza, u kojoj se konstrukcija analizira na preostali dio stalnog opterećenja i korisno ili pokretno opterećenje. Opterećenje se nanosi inkrementalno do sloma, s tim što inkrementi mogu biti različite veličine. U početku se mogu uzeti veći inkrementi opterećenja, dok pri pojavi nelinearnosti treba računati s manjim inkrementima opterećenja.

### 2.2.1 Model prijenosa sile prednapinjanja

Sila u kabelu, u bilo kom presjeku elementa, ovisi o početnoj sili prednapinjanja i gubicima. Na slici 1. prikazan je jedan element betona, s ugrađenim kabelom za prednapinjanje. Na jednom kraju kabela je poznata sila prednapinjanja  $S_A$ . Utjecaj prednapinjanja je predstavljen raspodjeljenim, normalnim  $p_n(s)$  i tangencijalnim  $p_t(s)$  opterećenjem, na duljini kabela  $ds$ . Normalno opterećenje, u bilo kom presjeku kabela, može se definirati u ovisnosti o radijusu zakrivljenosti kabela i intenzitetu sile prednapinjanja u tom presjeku:

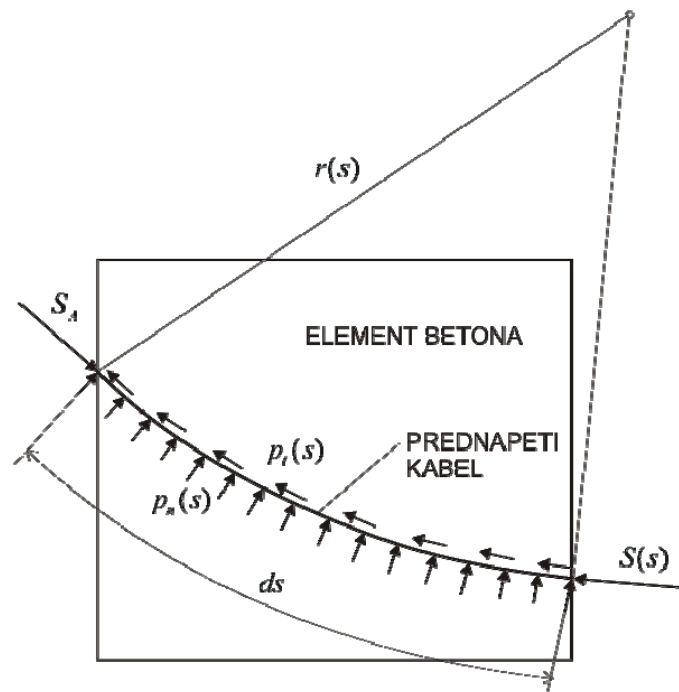
$$p_n(s) = \frac{S(s)}{r(s)}, \quad (2.1)$$

dok se tangencijalno opterećenje može definirati kao funkcija normalnog opterećenja i koeficijenta trenja  $\mu$  između kabela i betona:

$$p_t(s) = \mu p_n(s). \quad (2.2)$$

Sila u kabelu, na udaljenosti  $s$  od početka kabela, može se dobiti prema slijedećem izrazu:

$$S(s) = S_A - \int_A^s p_t(s) ds. \quad (2.3)$$



Slika 1. Element betona s ugrađenim kabelom za prednapinjanje /1/

Uvrštenjem izraza (2.1) i (2.2) u gornju jednadžbu dobiva se:



$$S(s) = S_A - \int_A^s \frac{S(s)}{r(s)} \mu ds. \quad (2.4)$$

Deriviranjem gornje jednačbe po  $ds$ , te nakon separacije varijabli dobiva se:

$$\frac{dS(s)}{S(s)} = -\frac{\mu}{r(s)} ds, \quad (2.5)$$

Integriranjem gornjeg izraza slijedi:

$$\frac{S(s)}{S_A} = e^{-\mu \int_A^s \frac{ds}{r(s)}}. \quad (2.6)$$

Konačno se sila u kabelu, na bilo kojoj udaljenosti  $s$  od početka kabela, može prikazati u obliku:

$$S(s) = S_A e^{-\mu g(s)}, \quad (2.7)$$

gdje je veličina

$$g(s) = \int_A^s \frac{ds}{r(s)} \quad (2.8)$$

funkcija geometrije kabela.

Ako se kabel prednapinje s jedne strane silom  $S_A$ , sila  $S_B$  na drugom kraju je

$$S_B = S_A e^{-\mu g(s)_{s=B}}, \quad (2.9)$$

gdje je

$$g(s) = \int_A^B \frac{ds}{r(s)}. \quad (2.10)$$

Sila u bilo kom presjeku kabela, te raspodijeljeno opterećenje se dobivaju izravno iz izraza (2.7), (2.1) i (2.2). Ako su poznate su sile na krajevima kabela  $S_A$  i  $S_B$ , onda se može odrediti koeficijent trenja prema izrazu:

$$\mu = \frac{1}{g(s)_{s=B}} \ln \frac{S_A}{S_B}. \quad (2.11)$$

Kod simetričnih slučajeva prednapinjanja problem je moguće jednostavno riješiti, jer je pad sile najveći na sredini. Ako je kabel nesimetričan ili su sile prednapinjanja na krajevima kabla različite, onda je problem određivanja sile u kabelu složeniji. Minimalna sila se javlja u presjeku koji nije unaprijed poznat. Ako se udaljenost tog presjeka od kraja A označi s  $x$ , a od kraja B s  $l - x$ , sila u tom presjeku se može odrediti s pomoću jednog od slijedećih izraza:

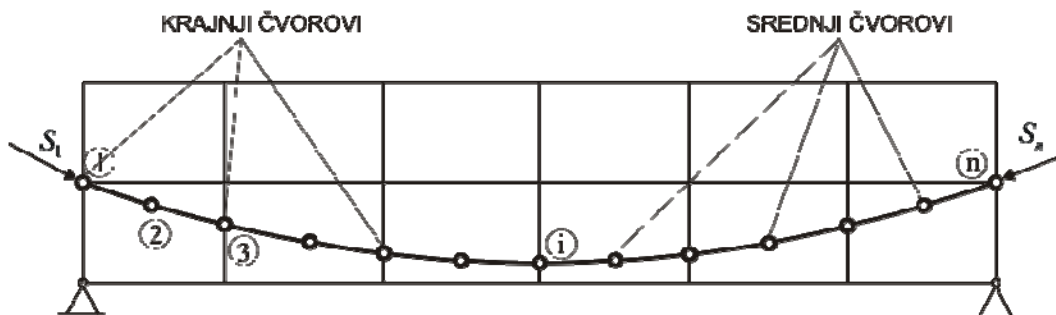
$$S_{\min} = S_A e^{-\mu \int_A^x \frac{ds}{r(s)}}, \quad S_{\min} = S_B e^{-\mu \int_B^{l-x} \frac{ds}{r(s)}}. \quad (2.12)$$

Izjednačavanjem ova dva gornja izraza dobiva se jednačba s granicom integracije kao nepoznicom. Ta jednačba se može numerički riješiti iterativnim postupkom. Smjer prednapinjanja u ovom modelu je određen redoslijedom čvorova tako što indeks čvora raste od kraja prema sredini kabla.. Tim se redoslijedom računa i pad sile prednapinjanja.

## 2.2.2 Modeliranje geometrije kabla

Načelno, položaj prednapetih kabla u odnosu na konačne elemente betona je proizvoljan. Kabeli mogu biti paraboloidni, ili ravni. Moguće su i kombinacije ovih oblika, s time što postoji ograničenje u smislu neprekinutosti prve derivacije trase kabla.

Za elemente kabla odabrani su 1D tročvorni izoparametrijski elementi i oni se mogu locirati proizvoljno u odnosu na 2D elemente betona. Položaj kabla se zadaje čvorovima čije su koordinate definirane u globalnom koordinatnom sustavu, slika 2. Radi osiguranja kontinuiteta između elemenata kabla, krajnji čvorovi elementa kabla moraju biti na mjestu sjecišta kabla i 2D elementa betona. Pošto su za 1D elemente kabla uzeti izoparametrijski elementi, srednji čvor 1D elementa se mora nalaziti na sredini. Za paraboloidne elemente nije moguće analitički odrediti koordinate srednjeg čvora, te ih je potrebno odrediti interpolacijom na polovici duljine luka.



Slika 2. Položaj kabla zadan čvorovima

## 2.2.3 Proračun utjecaja prednapinjanja

Utjecaji od prednapinjanja, kao što je već rečeno, su tlačne koncentrirane sile na sidrima i raspodjeljeno normalno i tangencijalno opterećenje uzduž kabla.



Čvorovi kabela su zadani globalnim koordinatama  $(x_j^*, y_j^*)$ ,  $(j = 1, 2, 3)$ . Koordinata bilo koje točke može se izraziti preko baznih funkcija linijskog elementa i globalnih koordinata čvorova kabela:

$$x = \sum_{j=1}^3 h_j x_j^*, \quad y = \sum_{j=1}^3 h_j y_j^*, \quad (2.13)$$

gdje su bazne funkcije 1D elementa dane sa:

$$\begin{aligned} h_1(\zeta) &= \frac{1}{2}\zeta(1-\zeta) \\ h_2(\zeta) &= (1+\zeta)(1-\zeta) \\ h_3(\zeta) &= \frac{1}{2}\zeta(1+\zeta). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Diferencijalni element duljine  $ds$  je dan sa:

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\zeta}\right)^2} d\zeta, \quad (2.15)$$

dok su:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\zeta} &= \sum_{j=1}^3 \frac{dh_j}{d\zeta} x_j^* \\ \frac{dy}{d\zeta} &= \sum_{j=1}^3 \frac{dh_j}{d\zeta} y_j^*. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Sila u bilo kojoj točki kabela je dana izrazom (2.7), dok je  $g(s)$  funkcija diferencijalnog elementa duljine  $ds$  i radijusa zakrivljenosti  $r(s)$  kabela.

Smjer normalnog raspodijeljenog opterećenja ovisi o zakrivljenosti kabela, koja se može odrediti iz izraza:

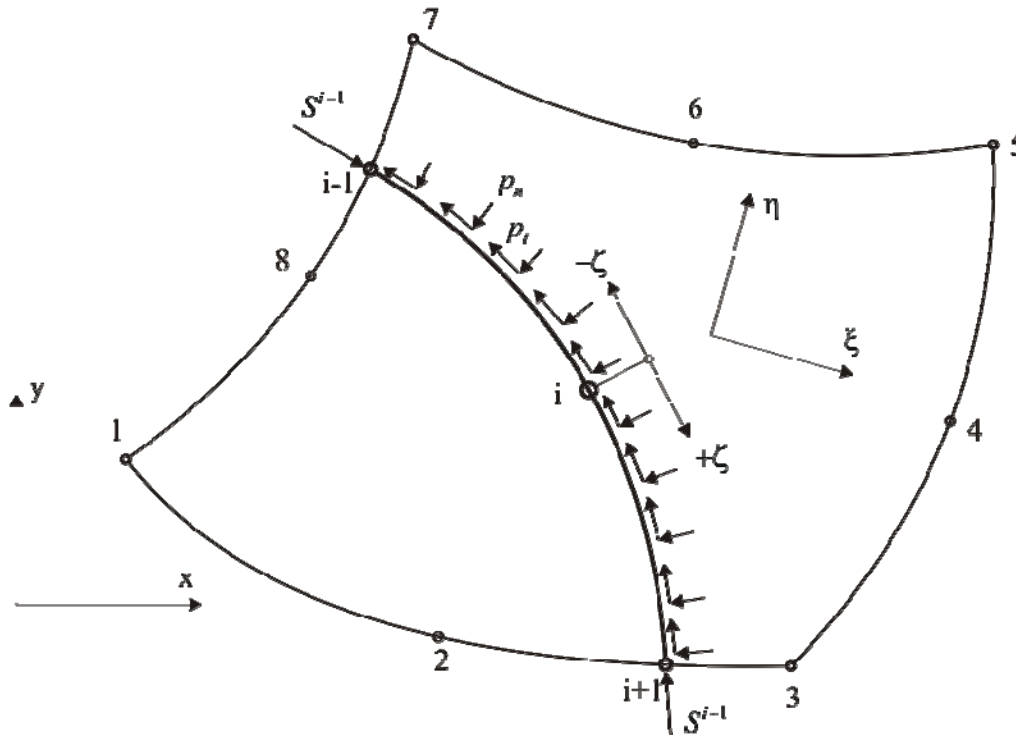
$$k = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (2.17)$$

Sada se sila prednapinjanja, u bilo kojoj točki 1D elementa, može prikazati kao:

$$S(\zeta) = \sum_{j=1}^3 h_j(\zeta) S_j. \quad (2.18)$$

### 2.2.4 Određivanje ekvivalentnih čvornih sila

Zbog primjene metode konačnih elemenata nužno je sva opterećenja uslijed prednapinjanja svesti u čvorove 2D elemenata betona, slika 3.



Slika 3. Opterećenje na 2D elementu uslijed prednapinjanja /1/

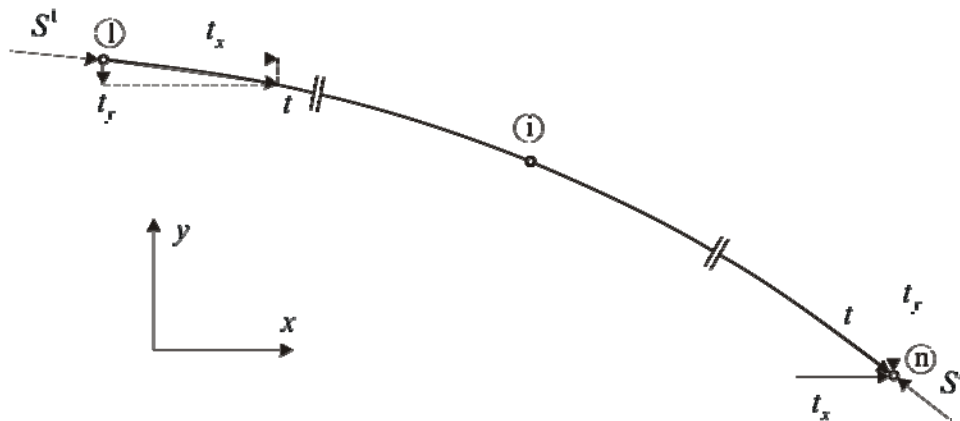
#### 2.2.4.1 Koncentrirana sila na sidru

Na mjestima usidrenja kabela djeluju tlačne sile na konstrukciju. Globalne koordinate točke  $(x_p, y_p)$  u kojoj djeluje sila su zadane geometrijom kabela. Isto tako, poznata je i normirana koordinata  $\zeta$  u lokalnom sustavu elementa kabela. Najprije je potrebno odrediti pripadne koordinate  $(\xi_p, \eta_p)$  u lokalnom koordinatnom sustavu 2D elementa betona. Ekvivalentna sila u čvoru  $i$ , ( $i = 1, \dots, 8$ ) 2D elementa je sada:

$$\begin{bmatrix} S_x^i \\ S_y^i \end{bmatrix} = N_i(\xi_p, \eta_p) \begin{bmatrix} S_x \\ S_y \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Sila prednapinjanja je zadana u pravcu tangente na liniju kabela, (crtež 4.), te je potrebno odrediti njezine komponente  $S_x$  i  $S_y$  /1/.





Slika 4. Sila prednapinjanja na početku i kraju kabela /1/

Komponente tangente na kabel u pravcu osi  $x$  i  $y$  su:

$$t_x = \frac{dx}{ds}, \quad t_y = \frac{dy}{ds}. \quad (2.20)$$

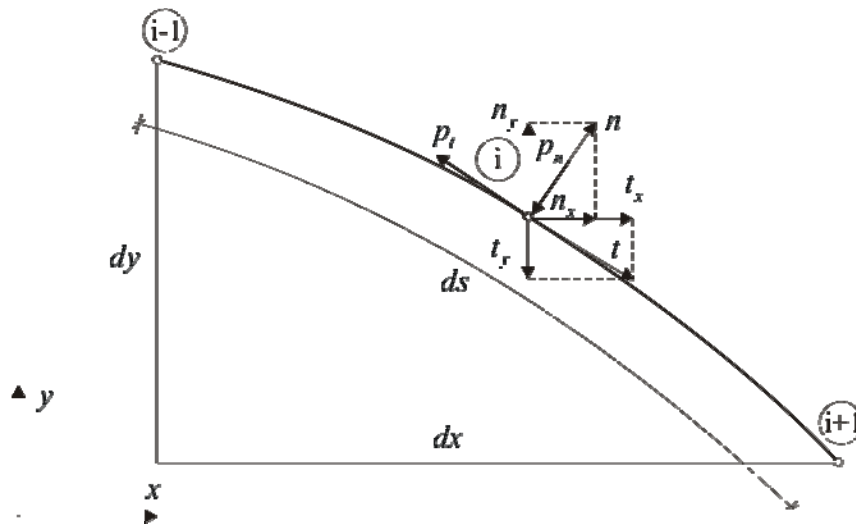
Komponente početne  $S^I$  i krajnje  $S^{II}$  sile su:

$$\begin{aligned} S_x^I &= S^I \frac{dx}{ds}, & S_y^I &= S^I \frac{dy}{ds}, \\ S_x^{II} &= -S^{II} \frac{dx}{ds}, & S_y^{II} &= -S^{II} \frac{dy}{ds}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

#### 2.2.4.2 Raspodijeljeno opterećenje

Utjecaj sile prednapinjanja uzduž kabela je obuhvaćen raspodijeljenim normalnim i tangencijalnim opterećenjem, kojega je potrebno pretočiti u ekvivalentne čvorne sile 2D elemenata.

Raspodijeljeno opterećenje je pozitivno ako djeluje u smjeru suprotnom od normale, odnosno tangente na liniju kabela, ako su čvorovi numerirani u smjeru kazaljke na satu, što je prikazano na slici 5.



Slika 5. Pozitivan predznak raspodijeljenog opterećenja /1/

Prirast sile prednapinjanja u pravcu globalnih koordinata  $x$  i  $y$  uslijed normalnog i tangencijalnog opterećenja je dan sa:

$$\begin{aligned} dP_x &= -p_n ds n_x - p_t ds t_x, \\ dP_y &= -p_n ds n_y - p_t ds t_y, \end{aligned} \quad (2.22)$$

gdje je diferencijalni element duljine luka dan sa:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \quad (2.23)$$

Komponente normale, odnosno tangente na liniju kabela, u pravcu globalnih osi, su dane slijedećim izrazima:

$$\begin{aligned} n_x &= -\frac{dy}{ds}, & n_y &= \frac{dx}{ds}, \\ t_x &= \frac{dx}{ds}, & t_y &= \frac{dy}{ds}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Uvrštenjem ovih izraza u izraze (2.22) dobiva se:

$$\begin{aligned} dP_x &= p_n dy - p_t dx, \\ dP_y &= -p_n dx - p_t dy. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Inkrement opterećenja u pravcu globalnih osi  $x$  i  $y$  može se prikazati, preko normirane koordinate, u obliku:



$$dP_x = \left( p_n \frac{\partial y}{\partial \zeta} - p_t \frac{\partial x}{\partial \zeta} \right) d\zeta, \quad (2.26)$$

$$dP_y = \left( -p_n \frac{\partial x}{\partial \zeta} - p_t \frac{\partial y}{\partial \zeta} \right) d\zeta.$$

Ukupna sila uslijed raspodijeljenog opterećenja, u pravcu globalnih osi, je

$$P_x = \int_K \left( p_n \frac{\partial y}{\partial \zeta} - p_t \frac{\partial x}{\partial \zeta} \right) d\zeta, \quad (2.27)$$

$$P_y = \int_K \left( -p_n \frac{\partial x}{\partial \zeta} - p_t \frac{\partial y}{\partial \zeta} \right) d\zeta.$$

Komponente sile, u pravcu globalnih osi  $x$  i  $y$ , u Gauss točkama elementa kabela, kako slijedi

$$P_x(\zeta_l) = \left( p_n(\zeta_l) \frac{\partial y}{\partial \zeta}(\zeta_l) - p_t(\zeta_l) \frac{\partial x}{\partial \zeta}(\zeta_l) \right) w_l, \quad (2.28)$$

$$P_y(\zeta_l) = \left( -p_n(\zeta_l) \frac{\partial x}{\partial \zeta}(\zeta_l) - p_t(\zeta_l) \frac{\partial y}{\partial \zeta}(\zeta_l) \right) w_l,$$

gdje je  $\zeta_l$ , ( $l=1,2,3$ ) normirana koordinata Gauss točke linijskog elementa kabela, a  $w_l$  težinski koeficijent numeričke integracije.

Ekvivalentne čvorne sile na 2D elementu betona, uslijed raspodijeljenog normalnog i tangencijalnog opterećenja, su:

$$P_{x_i} = \sum_{l=1}^3 N_i(\xi_l, \eta_l) P_x^l, \quad (2.29)$$

$$P_{y_i} = \sum_{l=1}^3 N_i(\xi_l, \eta_l) P_y^l,$$

gdje indeks  $i$ , ( $i=1, \dots, 8$ ) označava čvorove 2D elementa betona, a indeks  $l$ , ( $l=1, 2, 3$ ) Gauss točke 1D elementa kabela.

### 3. NUMERIČKI MODEL PUZANJA BETONA

U ovom radu je razvijen numerički model utemeljen na korekciji trenutnih modula elastičnosti betona, u pravcima glavnih naprezanja, te u funkciji koeficijenta puzanja betona. Funkcija puzanja i koeficijent puzanja betona uzeti su prema EC-2 /9/, i definirani slijedećim izrazima:



$$J(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\phi(t, t_0)}{E_{c28}}, \quad (3.1)$$

$$\phi(t, t_0) = \phi_0 \beta_c(t - t_0), \quad (3.2)$$

gdje su:

$J(t, t_0)$  - funkcija puzanja u vremenu  $t$ ,

$\phi(t, t_0)$  - koeficijent puzanja,

$E_c(t_0)$  - tangenti modul elastičnosti betona u trenutku  $t_0$ ,

$E_{c28}$  - tangenti modul elastičnosti betona pri starosti od 28 dana,

$\phi_0 = \phi_{RH} \beta(f_{cm}) \beta(t_0)$  - osnovni koeficijent puzanja,

$\beta_c(t - t_0) = \left[ \frac{t - t_0}{\beta_H + (t - t_0)} \right]^{0.30}$  - koeficijent kojim se opisuje razvoj deformacija puzanja

tijekom vremena.

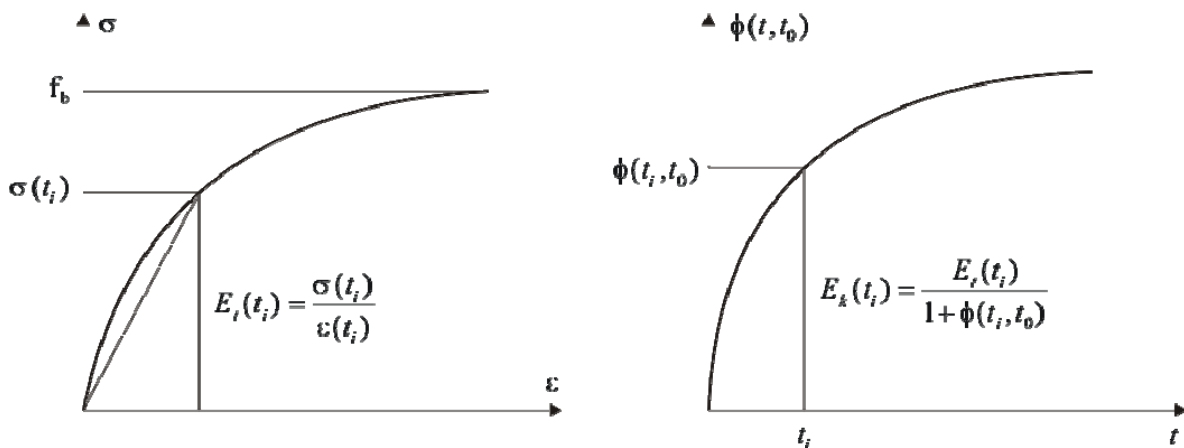
Koeficijent puzanja  $\phi(t, t_0)$  predstavlja, u bilo kom trenutku  $t$ , odnos deformacije puzanja prema početnoj elastičnoj deformaciji u trenutku  $t_0$ , i određen je izrazom:

Ukoliko naprezanja u betonu značajnije ne variraju za proračun deformacija puzanja može se koristiti izraz za efektivni modul elastičnosti, dan slijedećim izrazom:

$$E_{c,eff} = \frac{E_c(t_0)}{1 + \phi(t, t_0)}. \quad (3.3)$$

Određivanje trenutnih modula elastičnosti betona, za odgovarajuće vrijednosti glavnih naprezanja u nekom trenutku, vrši se preko radnog dijagrama betona. Za određenu razinu opterećenja poznata su glavna naprezanja u svim Gauss točkama konstrukcije, u početnom vremenskom trenutku  $t_0$ . S pomoću tih naprezanja i usvojenog radnog dijagrama betona moguće je odrediti trenutne sekantne module elastičnosti za svaki glavni pravac. Nakon toga se vrši korekcija tih trenutnih modula elastičnosti preko odgovarajućeg koeficijenta puzanja betona, koristeći izraz (1.3) za efektivni modul elastičnosti betona.

Na taj način se uvodi lokalna ortotropija betona na razini pripadnog područja svake Gauss točke, što se reflektira na matricu materijala, odnosno u konačnici, na matricu krutosti konačnog elementa betona. Ovaj je postupak pojednostavljeno prikazan na slici 6.



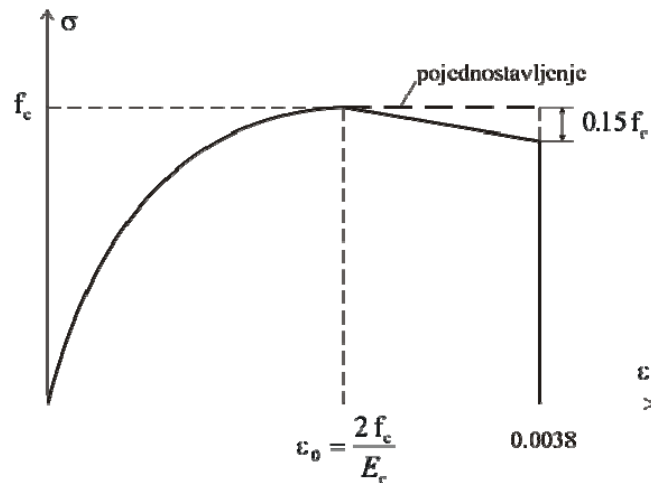
Slika 6. Postupak korekcije modula elastičnosti betona

### 3. 1 Korekcija modula elastičnosti betona

U praktičnim problemima s anizotropnim materijalima teško je dobiti realne vrijednosti njihovih konstanti. Kako bi materijal bio fizikalno moguć matrica  $\mathbf{D}_{\text{ort}}$  mora imati pozitivnu determinantu. Oblik i sadržaj matrice  $\mathbf{D}_{\text{ort}}$  potvrđuje da djelovanje samo osnog naprezanja ( $\tau_{12} = 0$ ) rezultira samo osnim deformacijama, što znači da se ne javljaju posmične deformacije. Isto tako, djelovanje samo posmičnog naprezanja rezultira samo posmičnim deformacijama. Kaže se da nema sprezanja između uzdužnih i posmičnih naprezanja/deformacija. Ova konstatacija uvijek vrijedi za izotropne materijale, dok za ortotropne materijale vrijedi samo u slučaju kada je pravac djelovanja opterećenja paralelan materijalnim osima.

Općenito, opterećenja mogu djelovati pod bilo kojim kutom u odnosu na glavne osi. Stoga je potrebno izvršiti transformaciju matrice materijala  $\mathbf{D}_{\text{ort}}$  iz materijalnog u globalni koordinatni sustav.

U formulaciji ovog modela analize deformacija puzanja betona potrebno je odrediti trenutni modul elastičnosti betona  $E(t)$  u pravcima glavnih tlačnih naprezanja svake integracijske točke. Kako bi to bilo moguće potrebno je usvojiti jednoosni radni dijagram betona u tlaku, te je stoga ovdje je usvojen Hogenstad-ov radni dijagram u tlaku /10/, prikazan na slici 7.

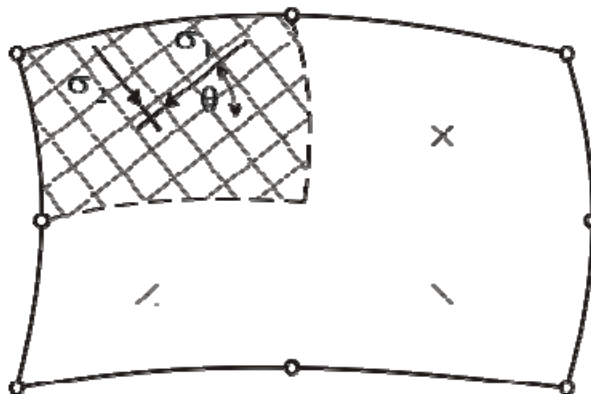


Slika 7. Radni dijagram betona prema Hogenstadu /8/

Na temelju poznatih glavnih napreznja iz radnog dijagrama betona se mogu odrediti i trenutne deformacije. Iz odnosa trenutnog glavnog napreznja u nekom pravcu i odgovarajuće trenutne deformacije, dobivene iz radnog dijagrama betona, može se dobiti trenutni sekantni modul elastičnosti betona u tom glavnom pravcu.

Pod pojmom „trenutni moduli elastičnosti“ podrazumijevaju se moduli elastičnosti u pravcima glavnih tlačnih napreznja za tu razinu tlačnog napreznja i odgovarajuću trenutnu tlačnu deformaciju, u određenom vremenskom trenutku.

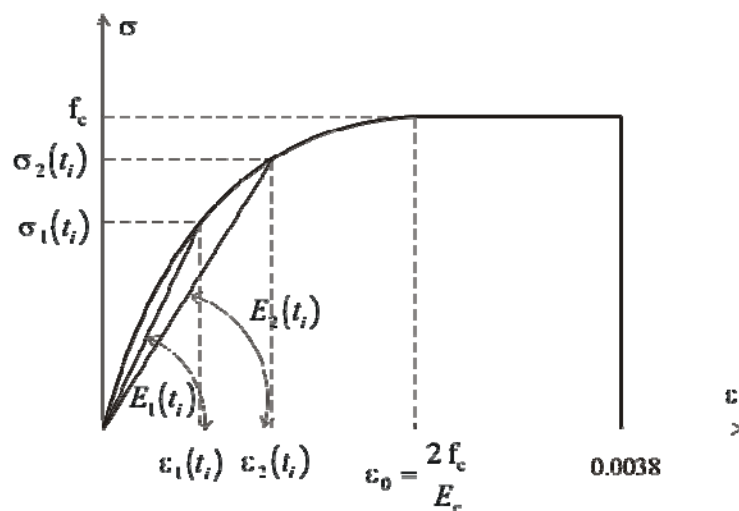
Ako se pretpostavi da su pravci i smjerovi glavnih napreznja  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ , za konačno vanjsko opterećenje, kao na crtežu 8., i ako su iz radnog dijagrama betona određene trenutne deformacije  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$ , onda se za svaku Gauss točku i za svaki glavni pravac mogu odrediti trenutni moduli elastičnosti betona prema slijedećim izrazima:



Slika 8. Glavna napreznja u Gauss točki (ortotropija)

$$\begin{aligned}
 E_1(t_0) &= \frac{\sigma_1(t_0)}{\varepsilon_1(t_0)}, & E_2(t_0) &= \frac{\sigma_2(t_0)}{\varepsilon_2(t_0)}; \\
 E_1(t_1) &= \frac{\sigma_1(t_1)}{\varepsilon_1(t_1)}, & E_2(t_1) &= \frac{\sigma_2(t_1)}{\varepsilon_2(t_1)}; \\
 & \vdots \\
 E_1(t_n) &= \frac{\sigma_1(t_n)}{\varepsilon_1(t_n)}, & E_2(t_n) &= \frac{\sigma_2(t_n)}{\varepsilon_2(t_n)}.
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

Glavna naprežanja  $\sigma_{1,2}(t_0), \sigma_{1,2}(t_1), \dots, \sigma_{1,2}(t_n)$  se dobiju u svakom vremenskom trenutku  $t_i$  iz numeričke analize. Promjena glavnih naprežanja tijekom vremena, u odnosu na glavna naprežanja prije uključenja vremenske analize deformacija, ne bi trebala biti velika, niti bi trebalo doći do značajnije rotacije njihovih pravaca zbog utjecaja puzanja betona. To se, u ovom modelu, osigurava usvojenim modelom fiksnih ortogonalnih pukotina. Do neke veličine preraspodjele naprežanja će sigurno doći zbog utjecaja deformacija puzanja betona, ne samo na beton, već i na armaturu i čelik za prednapinjanje.



Slika 9. Trenutni sekantni moduli elastičnosti u glavnim pravcima

Kako bi se numerički simulirale deformacije puzanja betona korigirat će se trenutni moduli elastičnosti betona u pravcima glavnih tlačnih naprežanja. Na taj način fiktivno se uvodi ortotropija materijala na razini svake Gauss točke u kojoj je barem jedno glavno naprežanje tlačno. U pravcu glavnih vlačnih naprežanja ne vrši se korekcija modula elastičnosti, i on je u tim pravcima jednak početnom modulu elastičnosti, ukoliko nije došlo do pojave pukotina u betonu. Nakon određivanja trenutnih modula elastičnosti betona prema izrazu (3.4) vrši se njihova korekcija. Izraz (3.3) može se zapisati u slijedećem obliku, za pojedini glavni pravac:



$$E^k(t) = \frac{E^t(t)}{1 + \phi(t, t_0)} = E^t(t) \cdot B(t), \quad (3.5)$$

gdje je  $E^k(t)$  korigirani modul elastičnosti betona u nekom trenutku za neki glavni pravac, a  $E^t(t)$  je trenutni modul elastičnosti betona za isti taj pravac. Vremenska funkcija

$$B(t) = \frac{1}{1 + \phi(t, t_0)}$$

ovisi o koeficijentu puzanja i ista je za svaki glavni pravac u određenom

vremenskom trenutku. Ova pretpostavka je prihvatljiva, iako postoji mogućnost izbora različitih vremenskih funkcija za pojedina stanja naprezanja.

Ovi korigirani moduli elastičnosti betona ulaze u matricu materijala, koja za ravninsko stanje naprezanja i vremenski trenutak  $t_i$ , ima oblik:

$$D_{ort}(t_i) = \begin{bmatrix} \frac{E_1^k(t_i)}{c} & \frac{\nu_{12} E_2^k(t_i)}{c} & 0 \\ \frac{\nu_{21} E_2^k(t_i)}{c} & \frac{E_2^k(t_i)}{c} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

Gornju matricu ortotropnog materijala treba transformirati iz materijalnih u globalne osi, te matrica ortotropnog materijala, u globalnim koordinatama, ima oblik:

$$\mathbf{D} = \mathbf{T} \mathbf{D}_{ort} \mathbf{T}^T. \quad (3.7)$$

Ova matrica sada ulazi u matricu krutosti konačnog elementa, i ona vrijedi samo u području koje pripada određenoj Gauss točki u kojoj su oba glavna naprezanja tlačna, ili je jedno glavno naprezanje tlačno, a drugo vlačno. U slučaju da su oba glavna naprezanja u nekoj Gauss točki vlačna, onda u njenom području treba koristiti matricu izotropnog materijala, odnosno matricu za raspucani beton ukoliko je došlo do pojave pukotina u betonu. Modul elastičnosti betona, u tom slučaju, jednak je početnom modulu elastičnosti, ili se vrši njegova redukcija prema usvojenom modelu vlačnog omekšanja.

Poisson-ovi koeficijenti se mogu zapisati u obliku:

$$\nu_{12} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \quad \nu_{21} = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \quad (3.8)$$

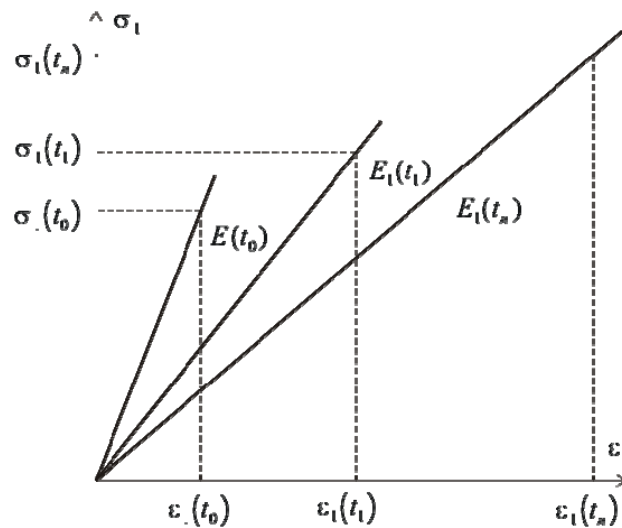
Za većinu građevnih materijala Poisson-ov koeficijent leži u području vrijednosti od 0.0 do 0.5. Ovo vrijedi za izotropne materijale, dok za anizotropne vrijednost Poisson-ovog koeficijenta može biti veća od 0.5 /11/. Modul posmika u ravnini 1-2 je neovisan o modulima elastičnosti. U jednadžbi (3.6) se nalazi pet materijalnih parametara, ali su samo četiri neovisna. Ovaj zaključak slijedi iz činjenice da matrica materijala mora biti simetrična, što znači da vrijedi slijedeća jednakost:

$$\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1}. \quad (3.9)$$



Za modul posmika  $G$  ortotropnog materijala predloženo je više izraza, a ovdje je korišten slijedeći izraz, koji uzima srednje vrijednosti za  $E_1$  i  $E_2$ , te za  $\nu_1$  i  $\nu_2$ :

$$G_{12} = \frac{E_1 + E_2}{4 \left[ 1 + \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2) \right]} \quad (3.10)$$

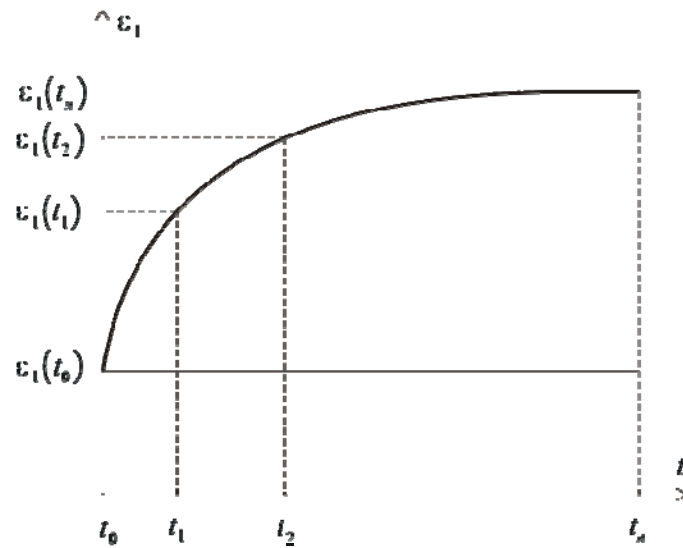


Slika 10. Trenutni moduli elastičnosti u glavnom pravcu 1

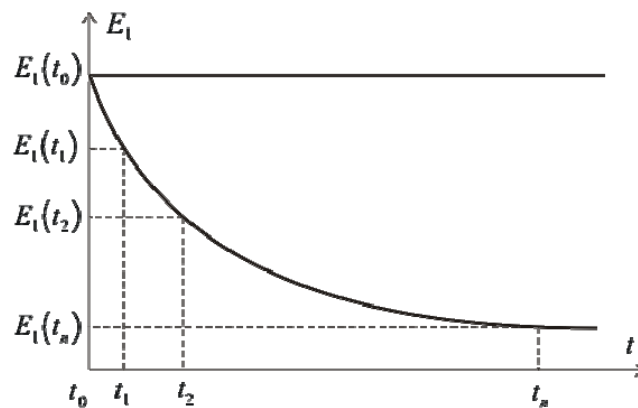
Na slici 10. prikazani su trenutni moduli elastičnosti, u funkciji trenutnih glavnih naprezanja i trenutnih deformacija dobivenih iz radnog dijagrama betona, u jednom glavnom pravcu. Sličan oblik bi se dobio i za drugi glavni pravac. Crtež 11. prikazuje deformacije puzanja betona u jednom glavnom pravcu u funkciji vremena, dok je na crtežu 12. prikazana promjena korigiranog modula elastičnosti, u glavnom pravcu 1, tijekom vremena.

Ovakvi dijagrami mogu se konstruirati i za drugi glavni pravac, na analogan način. Iz navedenog je vidljivo da je moguće odrediti korigirane module elastičnosti u svakom trenutku na temelju poznatih glavnih naprezanja, radnog dijagrama betona u tlaku i koeficijenta puzanja u tom trenutku.

Ovaj model funkcionira i za ravninsko stanje deformacija, te osno-simetrične probleme armiranih i prednapetih betonskih konstrukcija.



Slika 11. Deformacije puzanja u glavnom pravcu 1



Slika 12. Korigirani modul elastičnosti u glavnom pravcu 1

Matrica krutosti konačnog elementa betona ima standardni oblik:

$$k_e = \int_{V_e} B^T DB dV_e, \quad (3.11)$$

pri čemu je za ortotropna pripadna područja pojedinih integracijskih točaka matrica materijala  $\mathbf{D}$  dana izrazom (3.7). Nakon ovoga slijedi standardna procedura formiranja jednadžbi ravnoteže, te njihovo rješavanje inkrementalno-iterativnim postupkom u okviru metode konačnih elemenata.



## 4. PRIMJERI

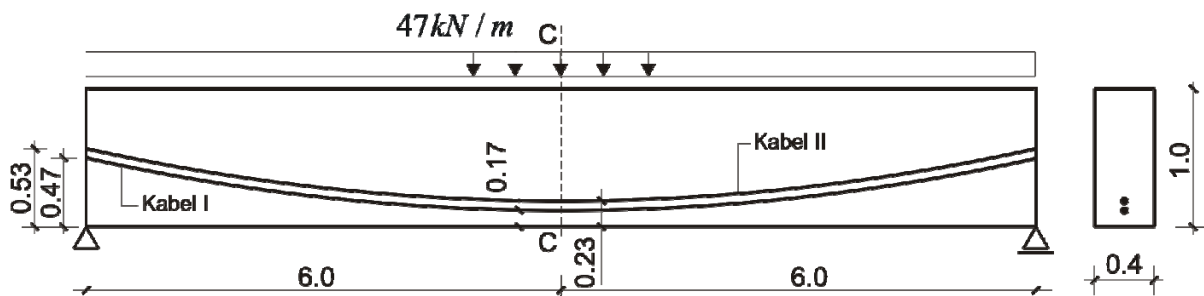
### 4.1 Primjer 1.

Ovdje je prikazana prednapeta betonska greda analizirana u /1/. Geometrija i opterećenje grede prikazani su na slici 13., dok su u tablici 1. dani parametri materijala. Greda je diskretizirana s 48 konačnih elemenata, s time da su dva elementa po visini grede.

Tablica 1. Parametri materijala

<u>Beton:</u>	<u>Prednapeti čelik:</u>
$f_c = 30.0 \text{ MN} / \text{m}^2$ ,	$f_y = 1500.0 \text{ MN} / \text{m}^2$
$\varepsilon_u = 0.003$	$E_s = 200000.0 \text{ MN} / \text{m}^2$
$E_c = 31500.0 \text{ MN} / \text{m}^2$ ,	$\varepsilon_u = 0.01$
$f_t = 3.0 \text{ MN} / \text{m}^2$	
$\nu = 0.20$	

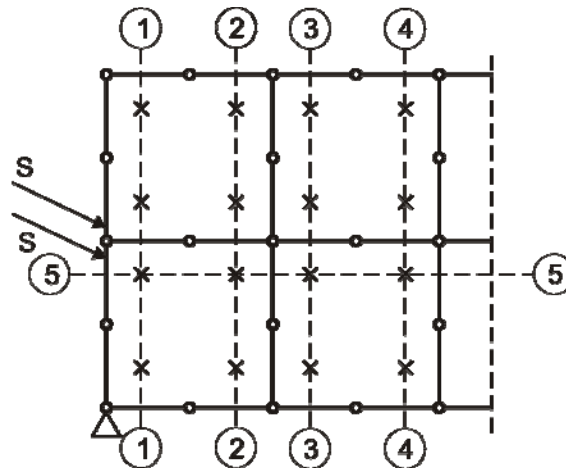
Proračun je izvršen u tri faze. Prva faza obuhvaća samo vlastitu težinu konstrukcije, u drugoj se vrši pojedinačno prednapinjanje kablova, dok se u trećoj fazi vrši proračun na vanjsko raspodijeljeno opterećenje. Greda je preliminarno proračunata prema klasičnoj teoriji prednapetog betona, te dobivena potrebna početna sila prednapinjanja u kablovima  $S = 1372.0 \text{ kN}$ .



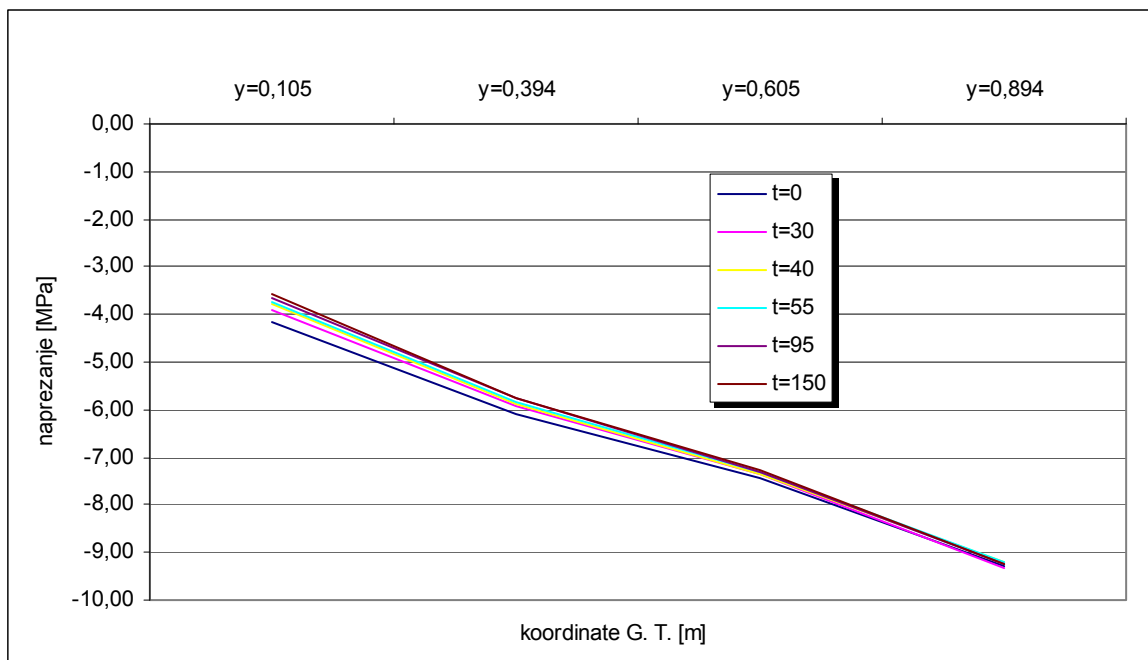
Slika 13. Geometrija i opterećenje grede

Na slici 14. prikazani su presjeci u kojima je analizirana promjena naprezanja betona tijekom vremena. Odabrana je zona unosa sile prednapinjanja, koja je približno jednaka visini nosača.

Na slici 15. prikazana je promjena naprezanja  $\sigma_{xx}$  u pravcu osi grede, u presjeku C-C, koji je najbliži sredini grede. Vidljivo je da tijekom vremena dolazi do pada ovih tlačnih naprezanja, koji nije značajan. Nešto veći pad se javlja u zoni kabela što bi se moglo protumačiti njihovim utjecajem na deformacije betona.



Slika 14. Presjeci za analizu napreznja



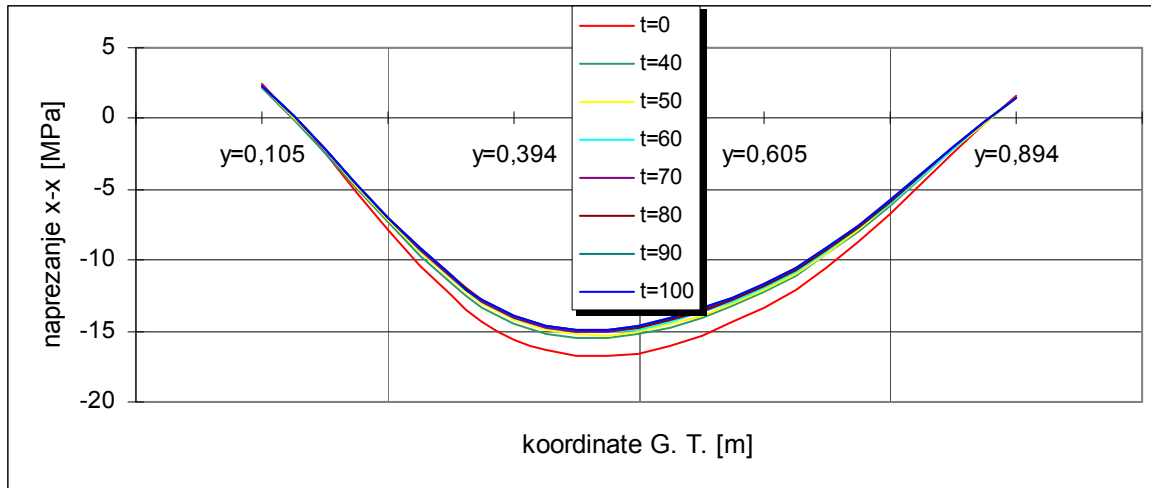
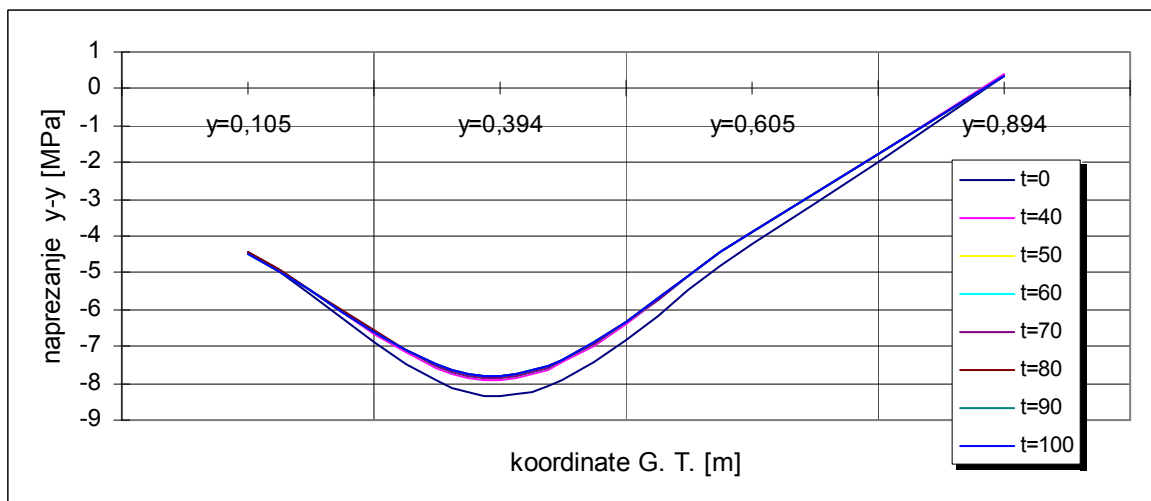
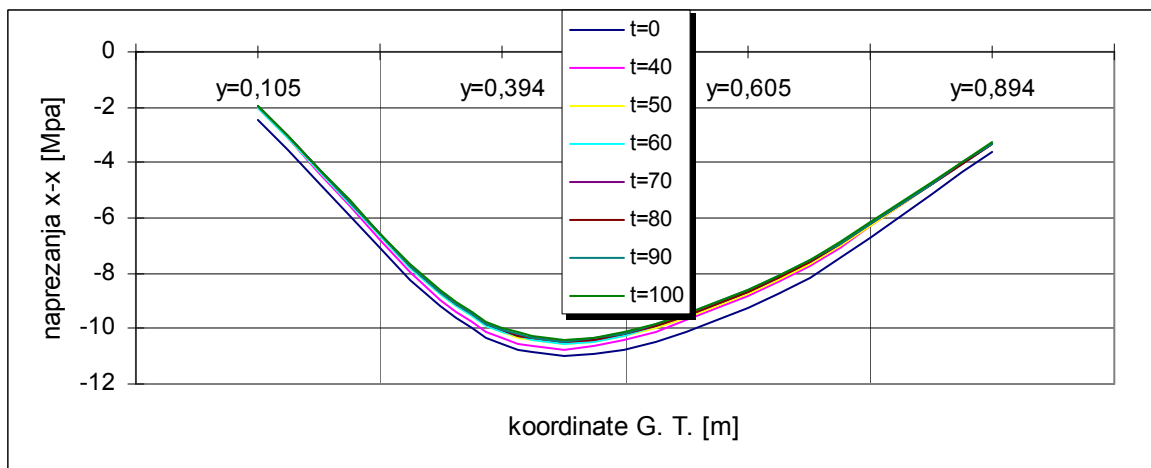
Slika 15. Promjena napreznja u presjeku C-C

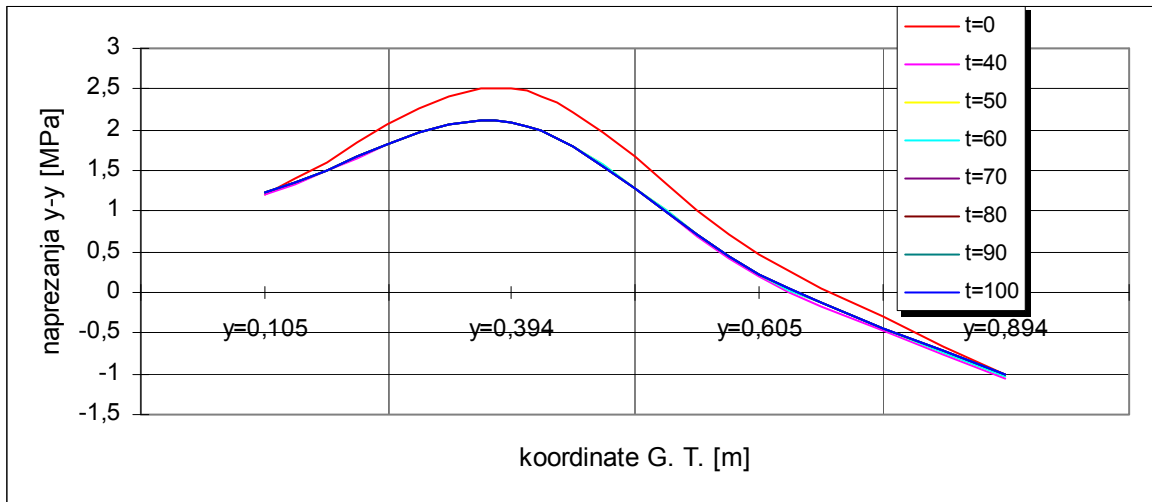
Na slikama 16. – 23. prikazana je promjena napreznja betona u presjecima 1-1, 2-2, 3-3 i 4-4, u zoni sidrenja kablova. Napreznje  $\sigma_{xx}$ , u presjeku 1-1, prikazano je na slici 16. Vidljivo je da dolazi do pada tlačnih napreznja tijekom vremena, posebice u dijelu presjeka s maksimalnim napreznjima. Raspodjela ovih napreznja po visini presjeka značajno se razlikuje od raspodjele prema klasičnom proračunu prednapetih konstrukcija, gdje je tlačno napreznje gotovo konstantno po visini presjeka. Maksimalno tlačno napreznje se javlja u području težišta kablova, a opada prema donjem i gornjem rubu grede.

Napreznje  $\sigma_{yy}$ , okomito na os grede, također je tlačno u presjeku 1-1, što je posljedica utjecaja oslonačkog područja grede. Već u presjeku 2-2 ova napreznja postaju vlačna po gotovo čitavoj visini presjeka, što je prikazano na slici 19.

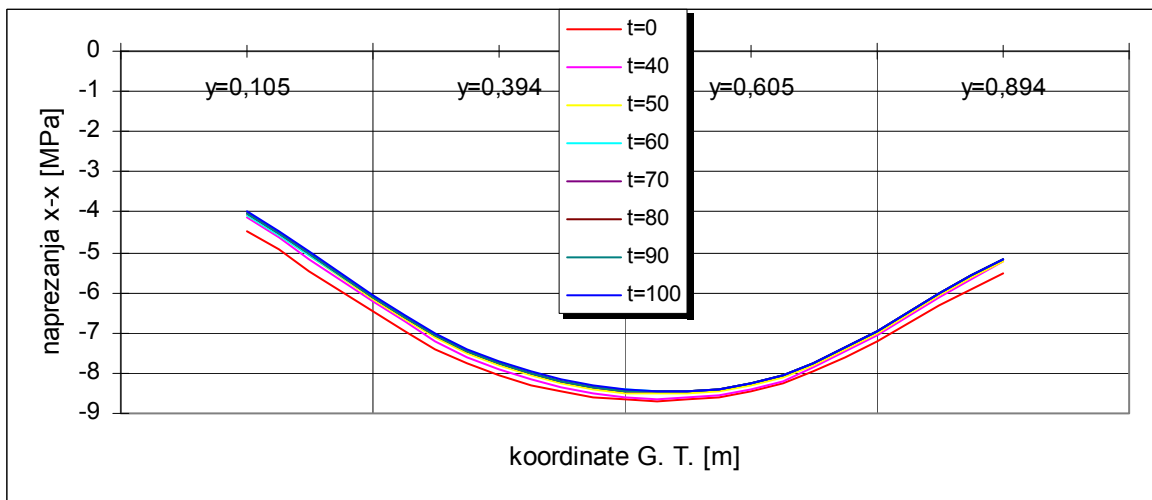


Vidljivo je da se tlačna naprezanja  $\sigma_{xx}$  u pravcu osi grede smanjuju s rastojanjem od oslonca. S povećanjem tog rastojanja stanje naprezanja se stabilizira, pri čemu naprezanja  $\sigma_{xx}$  postaju dominantna, a naprezanja  $\sigma_{yy}$  su gotovo zanemariva.

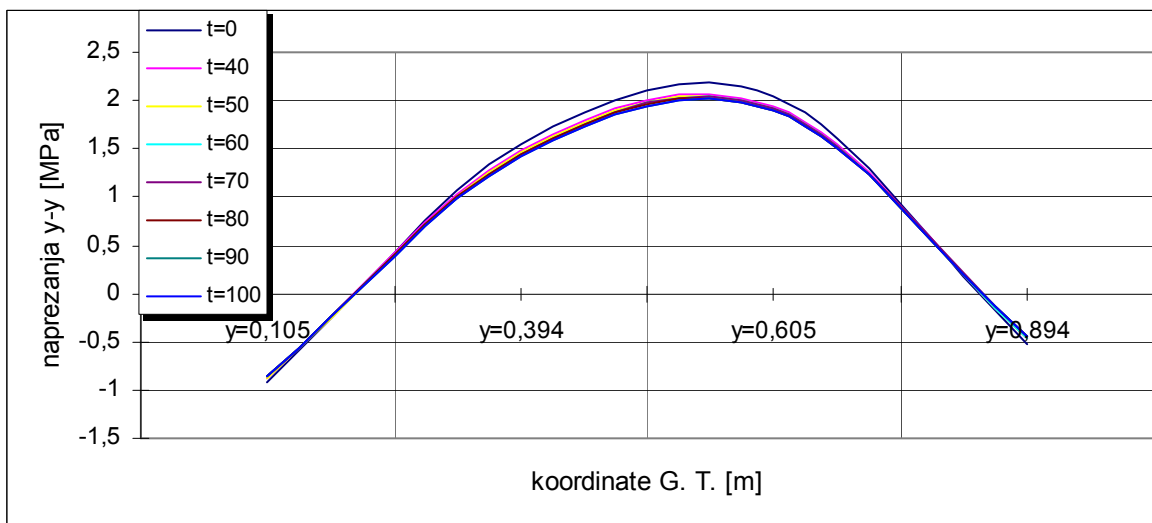
Slika 16. Promjena naprezanja  $\sigma_{xx}$  u presjeku 1-1Slika 17. Promjena naprezanja  $\sigma_{yy}$  u presjeku 1-1Slika 18. Promjena naprezanja  $\sigma_{xx}$  u presjeku 2-2



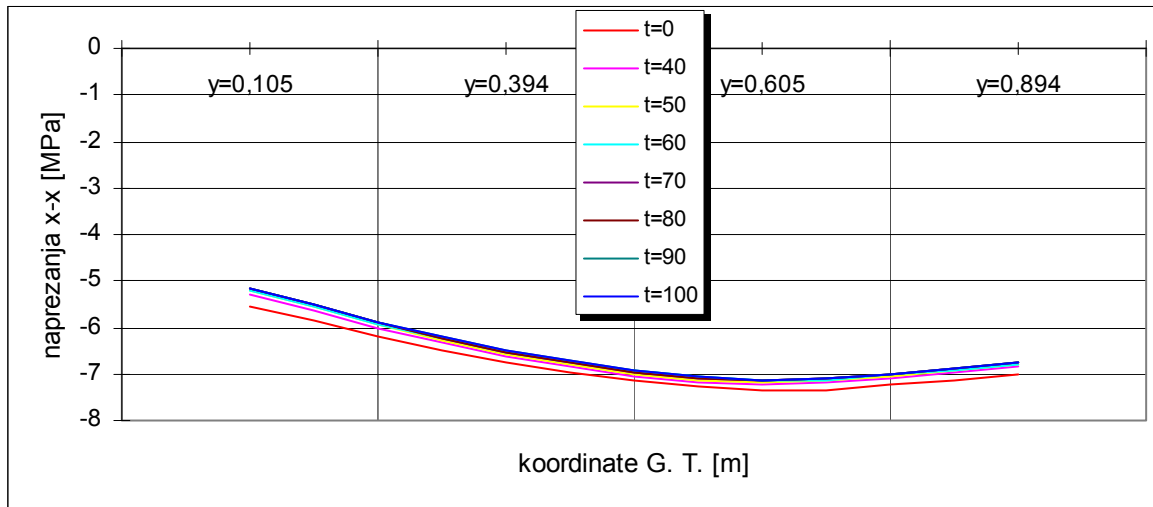
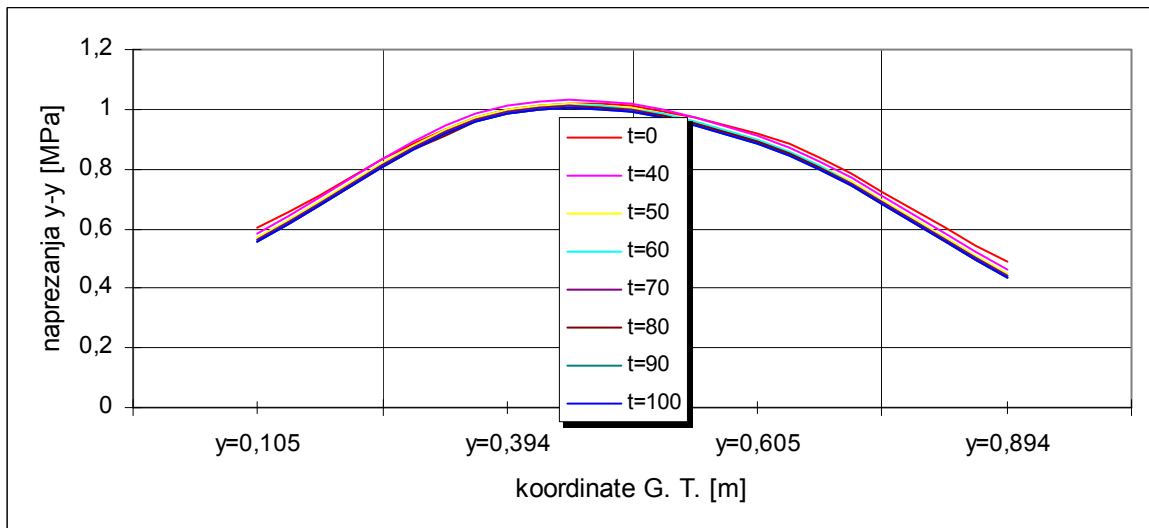
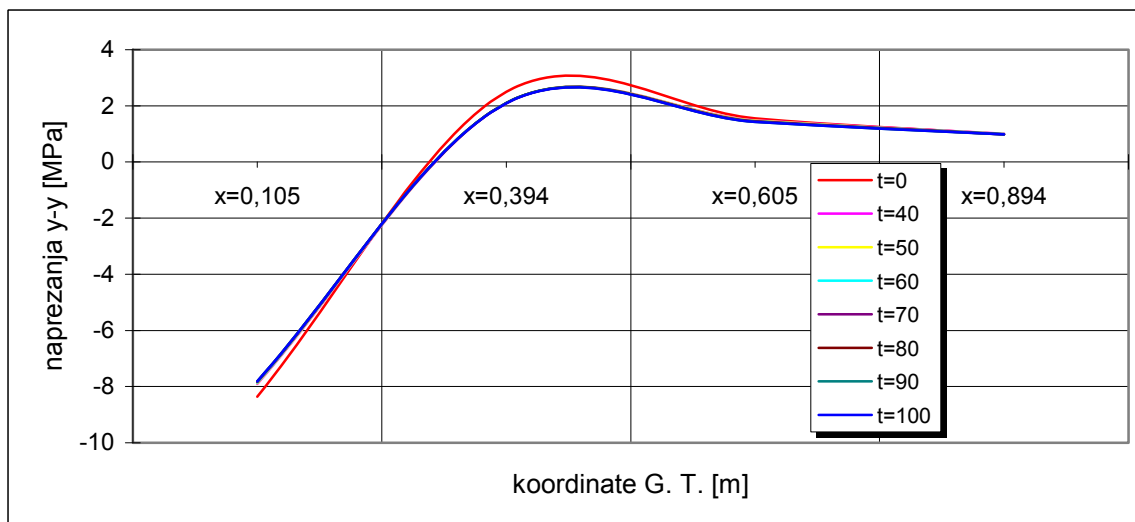
Slika 19. Promjena naprezanja  $\sigma_{yy}$  u presjeku 2-2



Slika 20. Promjena naprezanja  $\sigma_{xx}$  u presjeku 3-3



Slika 21. Promjena naprezanja  $\sigma_{yy}$  u presjeku 3-3

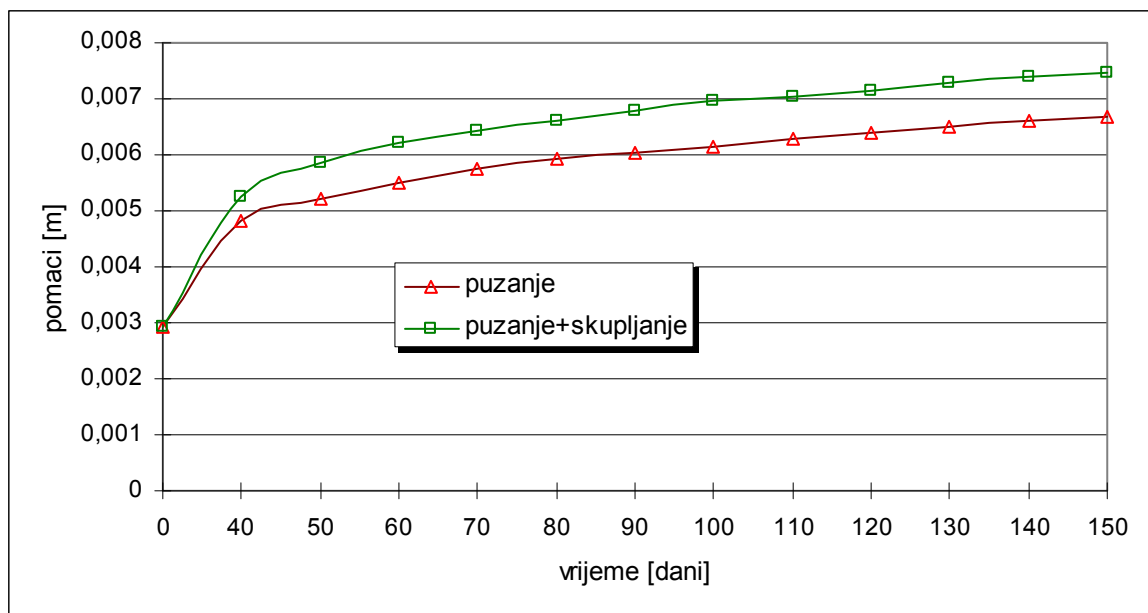
Slika 22. Promjena naprezanja  $\sigma_{xx}$  u presjeku 4-4Slika 23. Promjena naprezanja  $\sigma_{yy}$  u presjeku 4-4Slika 24. Promjena naprezanja  $\sigma_{yy}$  u presjeku 5-5



Na slici 24. prikazana je promjena naprezanja  $\sigma_{yy}$  u presjeku 5-5, paralelnom s osi nosača. Vidljivo je da ovo naprezanje, koje je u presjeku 1-1 tlačno, već u slijedećem presjeku prelazi u vlačno, te s odmakom od oslonca opada k nuli.

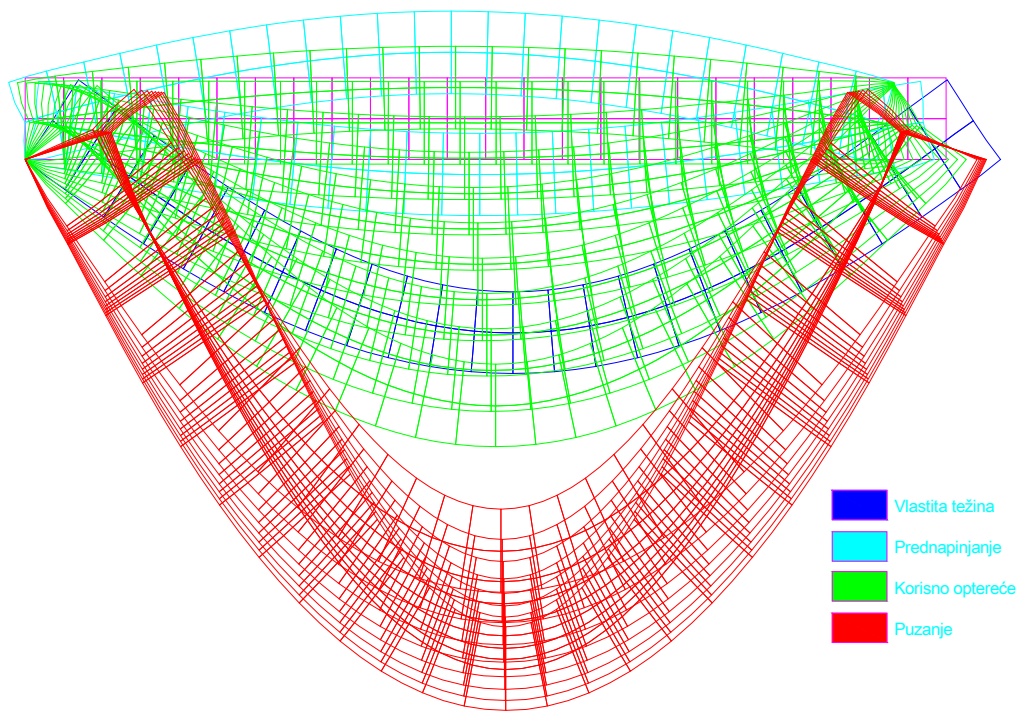
U svim ovim presjecima je očit utjecaj skupljanja i puzanja betona na veličinu i raspodjelu naprezanja. Dolazi do pada naprezanja tijekom vremena, što u ovoj zoni unosa sile prednapinjanja ima pozitivne učinke.

Na slici 25. prikazana je promjena pomaka sredine grede tijekom vremena, dok je na slici 26. prikazano polje pomaka grede tijekom vremena.



Slika 25. Pomaci sredine nosača





Slika 26. Pomaci grede

#### 4.2 Primjer 2.

U ovom primjeru je analiziran most u Čapljini /3/. Most je okvirna sandučasta konstrukcija raspona 40+84+40m, sa zglobnim vezama na krajnjim osloncima. Intrados mosta je paraboličan, s promjenom visine od 192cm do 404cm. Debljina gornje ploče sanduka je konstantna na cijeloj duljini mosta i iznosi 20cm na konzolnom dijelu, te 26cm na sredini sanduka. Donja ploča sanduka je promjenjive debljine. Najveća debljina ove ploče je na pozicijama srednjih oslonaca, i iznosi 50cm. Ova debljina se linearno smanjuje do vrijednosti od 18cm u sredini velikog raspona, te na pozicijama krajnjih oslonaca. Također i bočni zidovi sanduka imaju promjenjivu debljinu. Najveća debljina ovih zidova je 62cm, na pozicijama srednjih oslonaca, dok je najmanja 24cm, na pozicijama krajnjih oslonaca, te u sredini velikog raspona. Rasponska konstrukcija mosta je od betona MB45, dok je za prednapinjanje korišten sustav BBR CONA COMPACT, s užadima 12 $\Phi$ 0.5" kvalitete 1660/1860 MPa. Početna sila prednapinjanja svakog kabela iznosi 1250.0kN.

Uzdužni presjek polovine mosta prikazan je na slici 28. Na slici 27. su prikazani karakteristični poprečni presjeci. Poprečni presjek 10 se nalazi uz desnu stranu lijevog oslonca velikog srednjeg raspona. On sadrži užad grupe B i grupe A. Užad grupe B se nalazi u gornjoj ploči sanduka, dok se užad grupe A nalazi u zidovima sanduka. Poprečni presjek 19 se nalazi na sredini velikog raspona. Most nije simetričan zbog različitih visinskih kota odgovarajućih presjeka, te se morao uraditi model čitavog mosta. Na slici 29. je prikazan zamjenjujući poprečni presjek, koji je korišten u numeričkom proračunu. On je aproksimacija stvarnih presjeka koja je nužna zbog mogućnosti modela da opiše ravninsko stanje naprezanja.

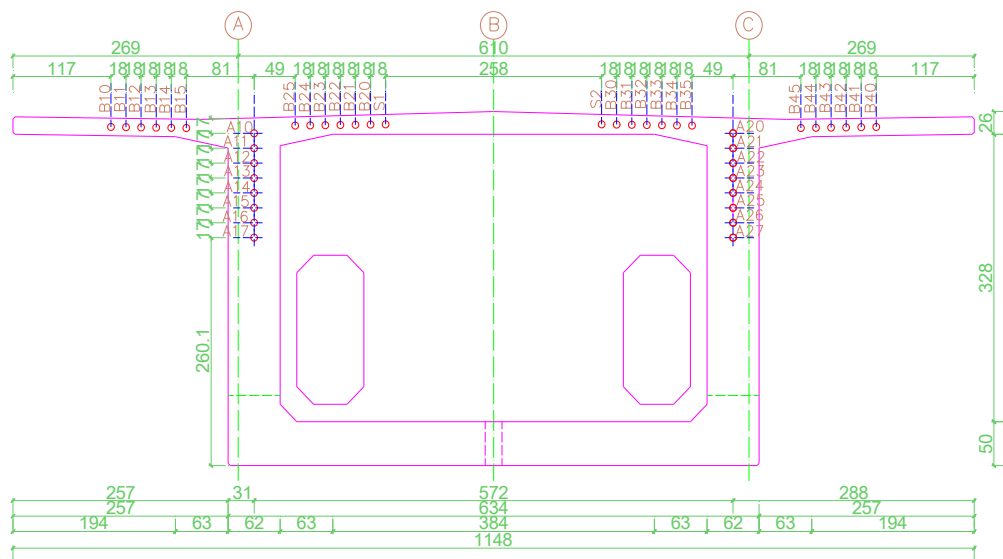
Konstrukcija mosta je diskretizirana s 996 osamčvornih 2D konačnih elemenata, s ukupno 3333 čvorova. Pri diskretizaciji kabela za prednapinjanje izvršeno je projiciranje svih kabela u vertikalnu ravninu.

Na taj način je grupa kabela B ukupno prikazana s dva kabela, jedan iznad srednjeg lijevog, a drugi iznad srednjeg desnog oslonca. Isto tako, grupa kabela C je predstavljena s ukupno tri kabela, koji se nalaze u donjoj ploči sanduka svakog raspona. Užad grupe A je prikazana s ukupno šesnaest kabela, po osam iznad oba srednja oslonca. Na taj način je dobiven ukupno 21 kabel, čija diskretizacija prati diskretizaciju konstrukcije osnovnim elementima betona.

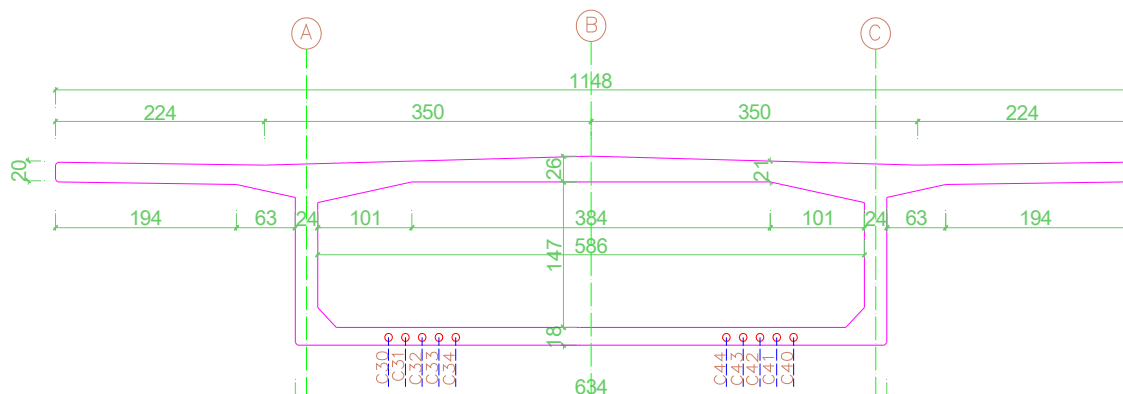
Klasična armatura RA400/500 uzeta je samo u donjoj i gornjoj ploči sanduka, u donjoj i gornjoj zoni, te stoga 332 2D elementa betona sadrže armaturu.

Pomaci tjemena srednjeg luka mosta su mjereni geodetski četiri puta. Prvi put tijekom probnog ispitivanja mosta, te nakon 80, 140 i 360 dana.

POPREČNI PRESJEK 10



POPREČNI PRESJEK 19

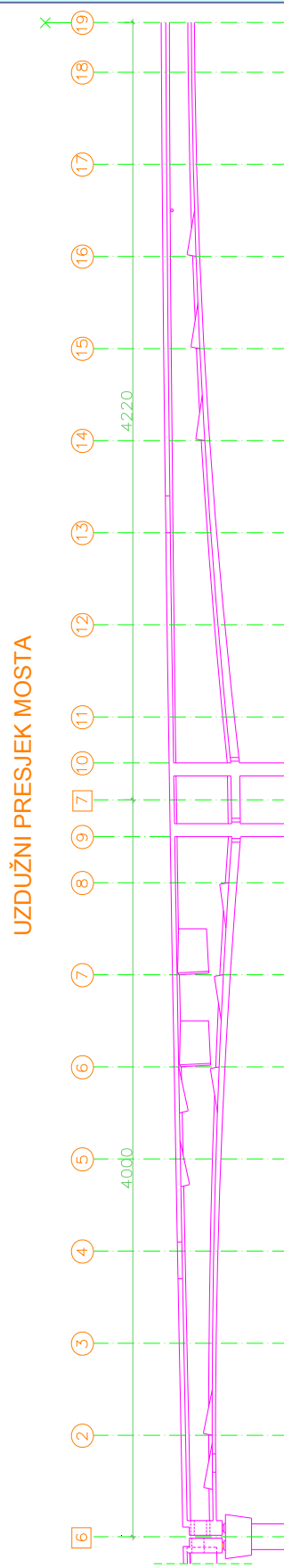


Slika 27. Karakteristični poprečni presjeci

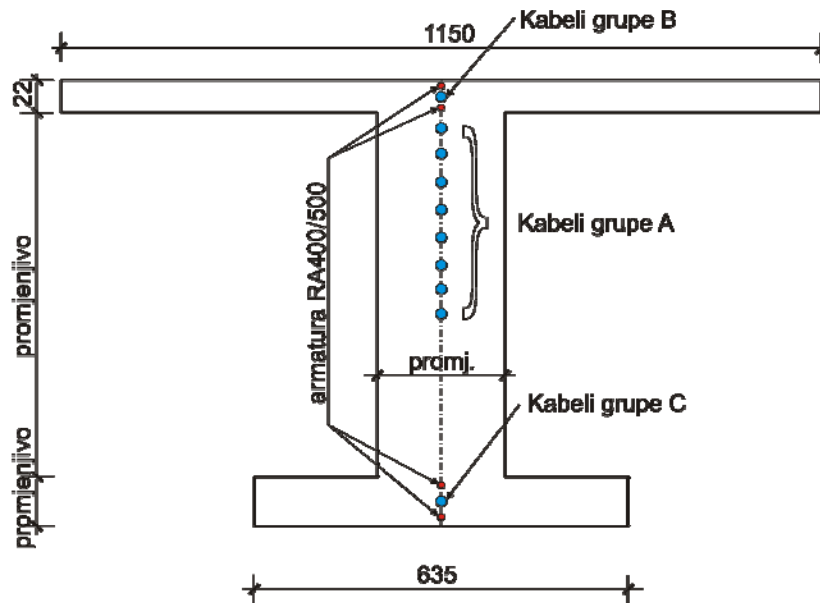


S obzirom na karakteristike ovog numeričkog modela i stvarnu konstrukciju može se reći da je njegova točnost uvjetovana slijedećim činjenicama:

- pojednostavljena geometrija modela u odnosu na stvarnu konstrukciju;
- pojednostavljenje u pogledu položaja kabela, odnosno njihovo projiciranje u odgovarajući rezultatni kabel, te u pogledu modeliranja vremena prednapinjanja svakog pojedinog kabela;
- zanemarenja utjecaja dijela klasične armature na deformabilnost konstrukcije;
- utjecaj opsega i površine poprečnog presjeka, te vlažnosti okoliša na veličinu deformacija puzanja, što se razlikuje u odnosu na stvarnu konstrukciju;
- utjecaj vremena prvog opterećivanja, budući da je konstrukcija mosta opterećena preostalim stalnim opterećenjem tek nakon završetka posljednjeg segmenta u sredini velikog raspona mosta, što se značajno razlikuje od numeričkog modela. Pri tome su segmenti, koji su ranije betonirani, već pretrpjeli izvjesnu veličinu deformacija puzanja i skupljanja.

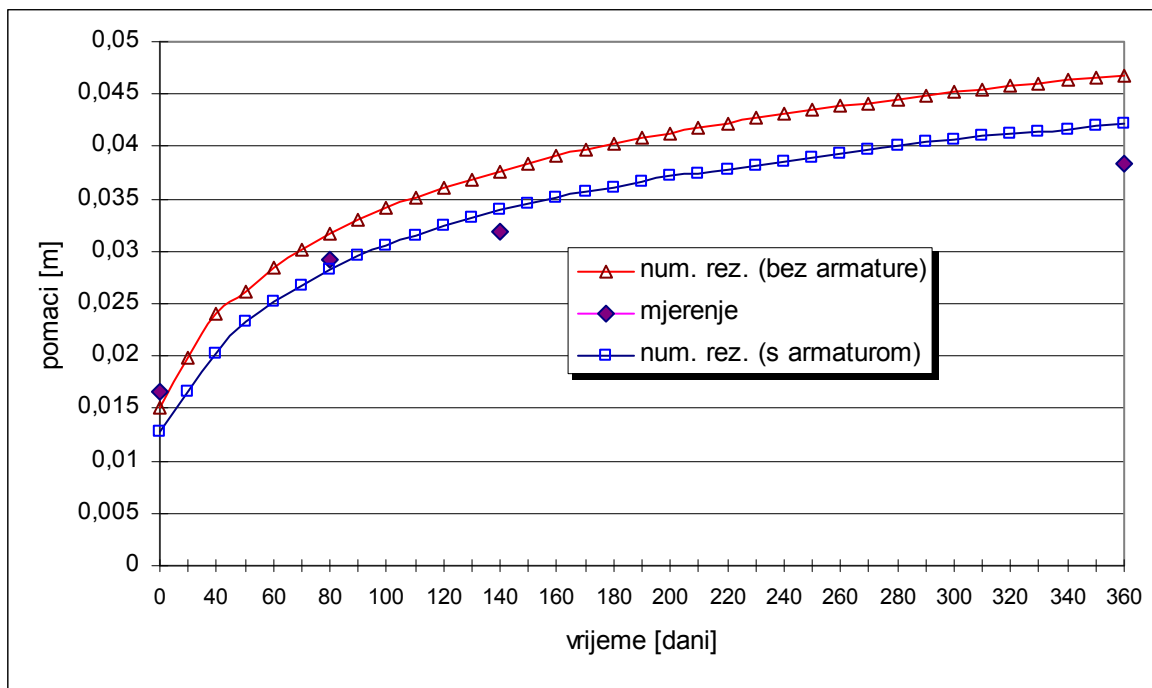


Slika 28. Uzdužni presjek polovine mosta



Slika 29. Zamjenjujući poprečni presjek

Na slici 30. prikazani su izmjereni pomaci sredine mosta, te pomaci dobiveni ovim numeričkim modelom bez klasične armature i s njom. Razlika izmjerenih i dobivenih pomaka nakon jedne godine iznosi oko 8mm u slučaju kada nema klasične armature, dok je u slučaju s klasičnom armaturom u gornjoj i donjoj ploči sanduka ta razlika znatno manja i iznosi oko 4mm. Iz ovoga je vidljiv utjecaj klasične armature na deformabilnost prednapetih konstrukcija, koji se ogleda u preuzimanju dijela naprezanja i smanjenju deformacija.



Slika 30. Pomaci sredine mosta tijekom vremena



## 5. ZAKLJUČAK

Iz prikazanih rezultata na pojedinim primjerima može se zaključiti da model daje fizikalno prihvatljiva rješenja, te da posjeduje sve značajke numerički efikasnog postupka. Usporedbom rezultata ovog modela s referentnim rješenjima iz literature, te izvršenog mjerenja na terenu, može se zaključiti da je model, prije svega, funkcionalan, ali i racionalan u smislu njegove matematičke formulacije. Posebna analiza točnosti modela nije vršena, ali se sigurno može reći da na nju utječe veličina vremenskog koraka, posebice na početku odvijanja procesa, kao i model betona pri jednoosnom tlaku. Isto tako, značajnu ulogu igra i izbor funkcije, odnosno koeficijenta puzanja. Zbog toga je potrebno, u početku, uzeti manje veličine vremenskog koraka (1-3dana), kako bi postupak što bolje pratio stvarno odvijanje procesa puzanja betona. Nenarušena interakcija betona i armature, ili čelika za prednapinjanje, daje deformacijama puzanja i skupljanja veliki značaj, posebice u preraspodjeli unutarnjih sila. Stoga se može govoriti o kontinuiranoj promjeni stanja naprezanja i deformacija tijekom dugog vremenskog perioda.

## LITERATURA

1. Ž. Nikolić Razvoj numeričkog modela za naknadno prednapinjanje armirano betonskih konstrukcija u ravnini, Magistarski rad, Građevinski fakultet Sveučilišta u Splitu, Split, 1993.
2. Ž. Nikolić, A. Mihanović Non-linear finite element analysis of post-tensioned concrete structures, Engineering Computations, Vol. 14, No. 5, 1997, pp. 509-528, MCB University Press.
3. M. Kožul Numerička simulacija vremenski ovisnih deformacija betona, Disertacija, Građevinski fakultet Sveučilišta u Mostaru, Mostar, 2011.
4. A. Ghali, R. Favre Concrete Structures: Stresses and Deformations, Chapman and Hall Ltd, New York, 1986.
5. L. G. Selna Time Dependent Behaviour of Reinforced Concrete Structures, UC-SESM Report No. 67-19, Division of Structural Engineering and Structural Mechanics, University of California, Berkeley, 1967.
6. A. M. Neville, W. H. Dilger, J. J. Brooks Creep of plain and structural concrete, Construction Press, London and New York, 1982.
7. Y. J. Kang Nonlinear Geometric, Material and Time Dependent Analysis of Reinforced and Prestressed Concrete Frames, Ph. D. Thesis, Division of Structural Engineering and Structural Mechanics, University of California, Berkeley, UC-SESM Report No. 77-1, 1977.
8. I. Tomičić Betonske konstrukcije – odabrana poglavlja, Društvo hrvatskih građevinskih konstruktora, serija Priručnici, knjiga 4, Zagreb, 1990.
9. EUROCODE 2: Design of Concrete Structures, Part 1: General Rules and Rules for Buildings, *Brüssel*, 1990.
10. E. Hognestad A study of Combined Bending and Axial Load in Reinforced Concrete Members, University of Illinois Eng. Exper. Station Bull. Ser. No. 399, Bull No. 1, 1951.
11. N. G. Pui Lam Constitutive Modelling and Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures, Ph. D. Thesis, The University of Hong Kong, 2007.